

① ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΓΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

ΤΥΠΟΥ I ΚΑΙ II, ΙΣΧΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΠΙΛΕΞΟΥΜΕ ΑΜΑΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΣΤΟΝ ΜΕΣΟ ΚΑΝΟΜΙΧΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ. Η ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΓΝΩΣΤΗ $\sigma = 1$.

$H_0: \mu = \mu_0 = 12$ (ΜΗΔΕΜΙΧΗ ΥΠΟΘΕΣΗ)

$H_1: \mu = \mu_1 = 15$ (ΕΜΑΛΛΑΤΙΧΗ ΥΠΟΘΕΣΗ)

ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΛΕΓΧΟ

ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ ΜΕΓΕΘΟΥΣ $n = 25$ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ, ΔΗΛΑΔΗ ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ X_1, X_2, \dots, X_{25} , ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΟΝ ΕΞΗΣ ΚΑΝΟΝΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ:

ΑΝ $\bar{X} \geq 14$ ΑΠΟΥΡΡΙΠΤΟΥΜΕ H_0

ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥΝ α, β , ΙΣΧΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ.

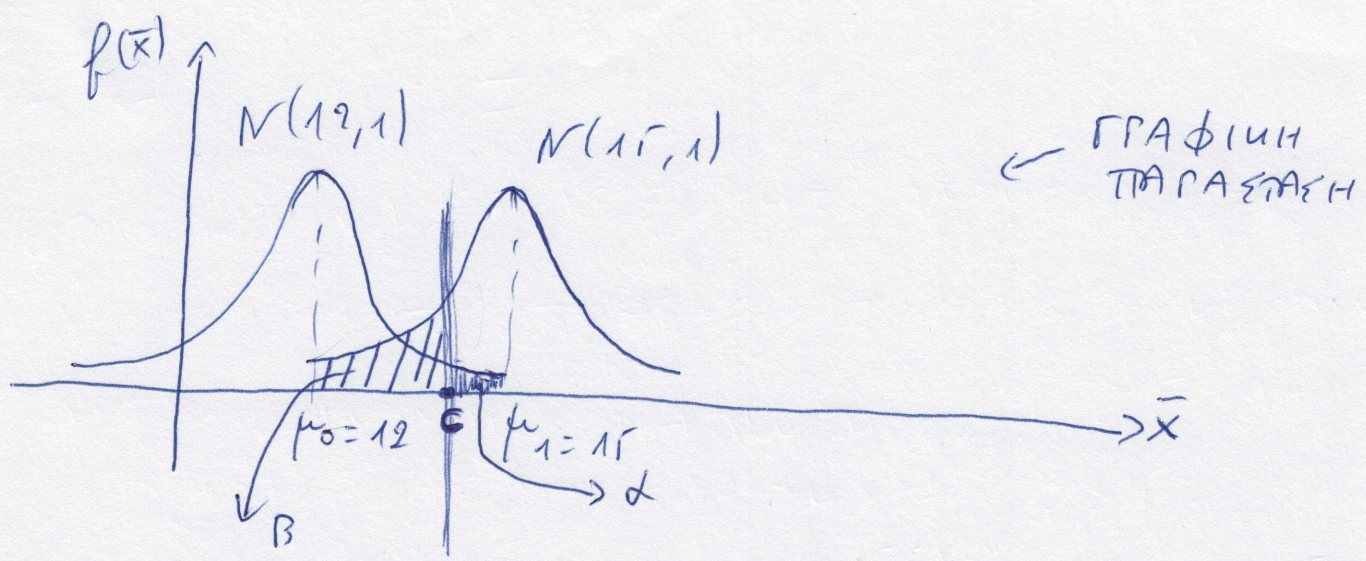
ΛΥΣΗ: Αφού $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ ΤΟΤΕ

$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, ΜΕ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = 1$

ΔΗΛΑΔΗ $\bar{X} \sim N(\mu, 1)$

ΕΣΤΟ ΟΤΙ $f(\bar{x})$ ΕΙΝΑΙ Η ΣΥΜΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ \bar{X} . ΕΣΤΟ ΟΤΙ ω_0 ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΠΟΥΡΡΙΨΗΣ (ΚΡΙΣΙΜΗ ΠΕΡΙΟΧΗ) ΚΑΙ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ $\bar{X} \geq 14$

2



$c = 14$ (ΚΡΙΣΙΜΟ ΣΗΜΕΙΟ)

α : ΕΠΙΣΧΙΑΣΜΕΝΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΤΑ ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ c

B : ΕΠΙΣΧΙΑΣΜΕΝΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΤΑ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ c

ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ c : H_0

ΑΝ $\bar{X} \in \omega_0$ ΤΟΤΕ

ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ c : H_1

ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ H_0

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΥΠΟΥ I (ΔΗΛΑΔΗ α):

$$\alpha = P(H_0 | H_0) = P(\bar{X} \geq 14 | \mu = \mu_0 = 12)$$

ΜΕ ΒΑΣΗ ΚΑΝΟΝΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΚΑΙ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΟ ΤΗΝ H_0 : $\bar{X} \sim N(12, 1)$

ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $Z = \frac{\bar{X} - 12}{1}$

ΚΑΙ ΣΥΜΕΠΤΕ $Z \sim N(0, 1)$. ΜΕ ΒΑΣΗ ΑΥΤΑ

ΚΑΙ $\alpha = P(Z + 12 \geq 14)$

$$\bar{X} = Z + 12$$

$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ΠΙΝΑΚΕΣ $N(0, 1)$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0.0228}$$

③ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΥΠΟΥ II
(ΔΗΛΑΔΗ β)

$$\beta = P(H_0 | H_1) = P(\bar{X} < 14 | \mu = \mu_1 = 15)$$

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ, ΥΠΟ ΤΗΝ H_1 : $\bar{X} \sim N(15, 1)$

ΕΥΜΕΠΟΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$$Z = \frac{\bar{X} - 15}{1} \Rightarrow \bar{X} = Z + 15, \text{ ΜΕ } Z \sim N(0, 1).$$

ΜΕ ΒΑΣΗ ΑΥΤΑ

$$\beta = P(Z + 15 < 14) = P(Z < -1) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1)$$

$$= 1 - 0.8413$$

ΠΙΝΑΚΕΣ $N(0, 1)$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 0.1587}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ: ΙΣΧΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ $P(H_0 | H_1)$

$$= 1 - \beta = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

ΑΡΙΘΜΑ ΜΕΓΑΛΗ \rightarrow ΕΧΟΥΜΕ "ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΜΗ"
ΣΤΗΝ H_0 .