Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Έλεγχοι Υποθέσεων

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

17/5/2022

Άσκηση 1

Στην πόλη Α μιας χώρας ερωτήθηκαν 500 νοικοκυριά, αν παρακολουθούν μια συγκεκριμένη εκπομπή στην τηλεόραση. Από αυτά τα νοικοκυριά, τα 300 απάντησαν ότι την παρακολουθούν. Θέλουμε να εξετάσουμε, σε επίπεδο σημαντικότητας 5% κατά πόσο η αναλογία των νοικοκυριών της πόλης Α που παρακολουθούν τη συγκεκριμένη εκπομπή είναι 65%.

Λύση Άσκησης 1

Ενδιαφέρομαι να εκτελέσω έναν δίπλευρο έλεγχο υποθέσεων για το ποσοστό (p) ενός πληθυσμού, για την αναλογία των τηλεθεατών της συγκεκριμένης εκπομπής στην τηλεόραση.

Ορίζω τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση ως εξής:

1.Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση του δίπλευρου ελέγχου για το ποσοστό (p) των τηλεθεατών

- $H_0 : p = 65\%$
- $H_1 : p \neq 65\%$

Συνέχεια

Για να μπορέσουμε να εκτελέσουμε τον έλεγχο, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει ο κανόνας του ′5′, η πρακτική εφαρμογή του θεωρήματος DeMoivre - Laplace.
Γνωρίζουμε ότι το δειγματικό ποσοστό των τηλεθεατών της εκπομπής είναι: $\hat{p} = 300/500 = 0.6$
Συνεπώς

- $np = 500 * 0.65 > 5$
- $nq = 500 * 0.35 > 5$

Άρα ισχύει ο κανόνας του ′5′.

Συνέχεια

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω την εξής ελεγχοσυνάρτηση:

2.Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης ελέγχου για το ποσοστό (p) των τηλεθεατών

$$TS = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \tag{1}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου (1) υπολογίζω την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης
$TS = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.6-0.65}{\sqrt{\frac{0.65*0.35}{500}}} = -2.34$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $\alpha = 0.05$, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $1 - \alpha/2 = 0.975$.

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον εξής κανόνα απόρριψης:

3.Κανόνας απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης του δίπλευρου ελέγχου για το ποσοστό (p) των τηλεθεατών

$$TS > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{2}$$

ή

$$TS < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

Συνέχεια

Έχουμε υπολογίσει τα εξής:
$TS = -2.34$ και $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4, σε απόλυτη τιμή η TS είναι μεγαλύτερη από το $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ($|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$), οπότε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση.
Άρα, έχουμε αρκετά ισχυρές ενδείξεις ότι το ποσοστό των τηλεθεατών στην πόλη Α που παρακολουθεί τη συγκεκριμένη εκπομπή είναι σημαντικά διαφορετική από 65%, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Άσκηση 2

Για μια έρευνα που δημοσιεύθηκε σε ερευνητικό περιοδικό, αναφορικά με το ποσοστό των ψαριών που είναι μολυνσμένα, εξετάστηκαν 588 ψάρια από τη Μεσόγειο Θάλασσα και βρέθηκαν μολυνσμένα τα 211, ενώ από 123 ψάρια που εξετάστηκαν από τον Ατλαντικό Ωκεανό, βρέθηκαν μολυνσμένα τα 26.
Είναι η αναλογία μολυνσμένων ψαριών ίδια σε Μεσόγειο και Ατλαντικό, σε επίπεδο σημαντικότητας 10%.

Λύση Άσκησης 2

Ενδιφέρομαι να εκτελέσω έναν δίπλευρο έλεγχο υποθέσεων για τη διαφορά των ποσοστών (p_x - p_y) των μολυνσμένων ψαριών: Ορίζω τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση ως εξής:

1.Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση του δίπλευρου ελέγχου για τη διαφορά των ποσοστών (p_M - p_A) των μολυνσμένων ψαριών

- $H_0 : p_M - p_A = 0$
- $H_1 : p_M - p_A \neq 0$

Συνέχεια

Για να μπορέσουμε να εκτελέσουμε τον έλεγχο, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει ο κανόνας του ′5′, η πρακτική εφαρμογή του θεωρήματος DeMoivre - Laplace και στους δυο πληθυσμούς των ψαριών.
Γνωρίζουμε ότι το δειγματικό ποσοστό των μολυνσμένων ψαριών στη Μεσόγειο είναι: $\hat{p}_M = 211/588 = 0.36$. Το αντίστοιχο δειγματικό ποσοστό των μολυνσμένων ψαριών στον Ατλαντικό είναι: $\hat{p}_A = 26/123 = 0.211$.
Παρατηρήστε ότι

- $n_M \hat{p}_M = 211 > 5$
- $n_M \hat{q}_M = 377 > 5$
- $n_A \hat{p}_A = 26 > 5$
- $n_A \hat{q}_A = 97 > 5$

Άρα ισχύει ο κανόνας του ′5′ και στους δυο πληθυσμούς.

Συνέχεια

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω την εξής ελεγχοσυνάρτηση:

2.Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης ελέγχου για τη διαφορά των ποσοστών των δυο πληθυσμών ψαριών

$$TS = \frac{\hat{p}_M - \hat{p}_A}{\sqrt{\hat{p}_G \hat{q}_G \left(\frac{1}{n_M} + \frac{1}{n_A} \right)}} \tag{5}$$

όπου

$$\hat{p}_G = \frac{n_M \hat{p}_M + n_A \hat{p}_A}{n_M + n_A} \tag{6}$$

Συνέχεια

Κάνοντας χρήση του τύπου (6) υπολογίζω την τιμή του ποσοστού των μολυνσμένων ψαριών και στους δυο πληθυσμούς

$$\hat{p_G} = \frac{588 * 0.36 + 123 * 0.211}{588 + 123} = 0.33$$

Κάνοντας χρήση του τύπου (5) υπολογίζω την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης

$$TS = \frac{0.36 - 0.211}{\sqrt{0.33 * 0.67 \left(\frac{1}{588} + \frac{1}{123} \right)}} = 3.17$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $\alpha = 0.1$, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $1 - \alpha/2 = 0.95$.

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον εξής κανόνα απόρριψης:

3.Κανόνας απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης του δίπλευρου ελέγχου για το ποσοστό (p) των δυο πληθυσμών ψαριών

$$TS > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{7}$$

ή

$$TS < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{8}$$

$\Leftrightarrow$

$$|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{9}$$

Συνέχεια

Έχουμε υπολογίσει τα εξής:
$TS = 3.17$ και $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.645$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 9, σε απόλυτη τιμή η TS είναι μεγαλύτερη από το $z_{0.95} = 1.645$ ($|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$), οπότε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση.
Άρα, έχουμε αρκετά ισχυρές ενδείξεις ότι το ποσοστό των μολυνσμένων ψαριών στη Μεσόγειο δεν είναι ίσο με το ποσοστό των μολυνσμένων ψαριών στον Ατλαντικό, σε επίπεδο σημαντικότητας 10%.