

Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Διαστήματα Εμπιστοσύνης

A. Λαδάς (a_ladas@upatras.gr)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

3/5/2022

Άσκηση 1

Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των φοιτητών του πρώτου εξαμήνου των τμημάτων Αγγλικής Φιλολογίας που γνωρίζουν ικανοποιητικά την Αγγλική Γλώσσα.

Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε τ.δ. 50 παρατηρήσεων από όλα τα τμήματα Αγγλικής Φιλολογίας όλων των Ελληνικών Πανεπιστημίων και βρίσκουμε ότι το 25% των πρωτοετών φοιτητών βρίσκονται σε ικανοποιητικό επίπεδο.

Να βρεθεί 95% δ.ε. για το πραγματικό ποσοστό p .

Λύση Άσκησης 1

Μπορούμε να διαπιστώσουμε τα εξής

- Πρόκειται για δείγμα μεγέθους 50 παρατηρήσεων
- Το δειγματικό ποσοστό των πρωτοετών φοιτητών Αγγλικής Φιλολογίας που γνωρίζουν σε ικανοποιητικό επίπεδο την Αγγλική Γλώσσα είναι $\hat{p} = 0.25$
- Το δειγματικό ποσοστό των πρωτοετών φοιτητών Αγγλικής Φιλολογίας που δεν γνωρίζουν σε ικανοποιητικό επίπεδο την Αγγλική Γλώσσα είναι $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.75$

Συνέχεια

Μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για το ποσοστό (p) ενός πληθυσμού

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad (1)$$

Πρέπει να εξετάσω εάν μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο (1), ελέγχοντας ότι ικανοποιούνται τα κριτήρια του Κανόνα του '5'.

Εφαρμογή Κανόνα του '5'

- $n\hat{p} = 50 * 0.25 = 12.5 > 5.$
- $n\hat{q} = 50 * 0.75 = 37.5 > 5.$

Άρα ικανοποιούνται τα κριτήρια του Κανόνα του '5'.

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1 - \alpha = 0.95$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.05$.

Κάνοντας χρήση του τύπου (1), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & [\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}] = \\
 & [0.25 - 1.96 \sqrt{\frac{0.25*0.75}{50}}, 0.25 + 1.96 \sqrt{\frac{0.25*0.75}{50}}] = \\
 & [0.13, 0.37]
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Από τ.δ. 200 ατόμων αστικών περιοχών (x) βρέθηκε ποσοστό 51% καπνιστών, ενώ σε τ.δ. 100 ατόμων αγροτικών περιοχών (y) βρέθηκε ποσοστό 48% καπνιστών.

Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα 95% δ.ε. για την πραγματική διαφορά των ποσοστών των καπνιστών στις δυο περιοχές.

Λύση Άσκησης 2

Μπορούμε να διαπιστώσουμε τα εξής

- Πρόκειται για δείγμα μεγέθους $n_x = 200$ παρατηρήσεων αστικών περιοχών και $n_y = 100$ παρατηρήσεων αγροτικών περιοχών
- Το δειγματικό ποσοστό των καπνιστών αστικών περιοχών είναι $\hat{p}_x = 0.51$ και το δειγματικό ποσοστό των καπνιστών αγροτικών περιοχών είναι $\hat{p}_y = 0.48$
- Το δειγματικό ποσοστό των μη-καπνιστών αστικών περιοχών είναι $\hat{q}_x = 1 - \hat{p}_x = 0.49$ και το δειγματικό ποσοστό των μη-καπνιστών αγροτικών περιοχών είναι $\hat{q}_y = 1 - \hat{p}_y = 0.52$

Συνέχεια

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να κάνω χρήση του εξής τύπου δ.ε.

Τύπος δ.ε. για τη διαφορά των ποσοστών ($p_x - p_y$) δυο πληθυσμών

$$(\hat{p}_x - \hat{p}_y) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_x \hat{q}_x}{n_x} + \frac{\hat{p}_y \hat{q}_y}{n_y}} \quad (2)$$

Συνέχεια

Εξετάζω εάν μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο (2), ελέγχοντας ότι ικανοποιούνται τα κριτήρια του Κανόνα του '5' και στα δυο δείγματα x και y .

Εφαρμογή Κανόνα του '5'

- $n_x \hat{p}_x = 200 * 0.51 = 102 > 5.$
- $n_x \hat{q}_x = 200 * 0.49 = 98 > 5.$
- $n_y \hat{p}_y = 100 * 0.48 = 48 > 5.$
- $n_y \hat{q}_y = 100 * 0.52 = 52 > 5.$

Άρα ικανοποιούνται τα κριτήρια του Κανόνα του '5' και στα δυο δείγματα.

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $1 - \alpha = 0.95$ άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\alpha = 0.05$.

Κάνοντας χρήση του τύπου (2), έχουμε:

$$[(\hat{p}_x - \hat{p}_y) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_x \hat{q}_x}{n_x} + \frac{\hat{p}_y \hat{q}_y}{n_y}}, (\hat{p}_x - \hat{p}_y) +$$

$$z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_x \hat{q}_x}{n_x} + \frac{\hat{p}_y \hat{q}_y}{n_y}}] =$$

$$[(0.51 - 0.48) - 1.96 \sqrt{\frac{0.51 \cdot 0.49}{200} + \frac{0.48 \cdot 0.52}{100}}, (0.51 - 0.48) +$$

$$1.96 \sqrt{\frac{0.51 \cdot 0.49}{200} + \frac{0.48 \cdot 0.52}{100}}] =$$

$$[-0.09, 0.15]$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Παρατηρήστε ότι το δ.ε. περιέχει το μηδέν.

Άσκηση 3

Από τ.δ. 300 κατοίκων μιας Ευρωπαϊκής Χώρας (x) βρέθηκε ποσοστό 55% οι οποίοι επιλέγουν για τις καλοκαιρινές τους διακοπές το εξωτερικό, ενώ σε τ.δ. 180 κατοίκων μιας δεύτερης Ευρωπαϊκής χώρας (y) βρέθηκε ποσοστό 59% οι οποίοι επιλέγουν για τις καλοκαιρινές τους διακοπές το εξωτερικό. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα 90% δ.ε. για την πραγματική διαφορά των ποσοστών των κατοίκων των δυο Ευρωπαϊκών χωρών, οι οποίοι επιλέγουν για τις καλοκαιρινές τους διακοπές το εξωτερικό.