Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Ιδιότητες Εκτιμητριών (Αμεροληψία-Αποτελεσματικότητα-Συνέπεια)

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

29/3/2022

Βασικές Έννοιες - Ορισμός

Μια εκτιμήτρια
(στατιστική συνάρτηση που προέρχεται από το δείγμα) $\hat{\theta}$
της άγνωστης παραμέτρου του πληθυσμού Θ, χαρακτηρίζεται
ως αμερόληπτη όταν:

$$\mathbf{E(\hat{\theta}) = \Theta}$$

Υπενθύμιση:
$E(\bar{x}) = \mu$
$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Άσκηση 1

Από πληθυσμό (X) με άγνωστο μέσο μ και άγνωστη διακύμανση σ^2, επιλέγουμε τυχαίο δείγμα (τ.δ.) $x_1, x_2, ..., x_n$.
Να ελεγχθεί εάν οι παρακάτω σ.σ. είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες του μέσου του πληθυσμού:

1. $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$
2. $\hat{\theta}_2 = \bar{x} + 5$
3. $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n+10}(\sum_{i=1}^{n} x_i)$
4. $\hat{\theta}_4 = \frac{5x_1+2x_2+2x_3-5x_4+(x_5+...+x_n)}{n}$

Συνέχεια Άσκησης 1

Θα πρέπει να εξετάσω εάν $\mathrm{E}(\hat{\theta}_i) = \mu$, για i=1,2,3,4

1. $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)) = \frac{1}{n}\mathrm{E}((\sum_{i=1}^{n} x_i)) =$

   $\frac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n} E(x_i))) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$

   Αφού $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1) = \mu$, τότε η $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου μ του πληθυσμού.

2. $\mathrm{E}(\hat{\theta}_2) = \mathrm{E}(\bar{x} + 5) = \mathrm{E}(\bar{x}) + \mathrm{E}(5) = \mu + 5$

   Αφού $\mathrm{E}(\hat{\theta}_2) \neq \mu$, τότε η $\hat{\theta}_2 = \bar{x} + 5$
   δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου μ του πληθυσμού.

Συνέχεια Άσκησης 1

3. Αφήνεται για εξάσκηση.

4. $E(\hat{\theta}_4) = E(\frac{5x_1+2x_2+2x_3-5x_4+(x_5+...+x_n)}{n}) =$

$\frac{1}{n}E(5x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 + (x_5 + ... + x_n)) =$

$\frac{1}{n}(5E(x_1)+2E(x_2)+2E(x_3)-5E(x_4)+E(x_5)+...+E(x_n)) =$

$\frac{1}{n}(5\mu + 2\mu + 2\mu - 5\mu + \mu + ... + \mu) = \frac{1}{n}(4\mu + (n-4)\mu) = \mu$

Αφού $E(\hat{\theta}_4) = \mu$, τότε η $\hat{\theta}_4$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου μ του πληθυσμού.

Βασικές Έννοιες - Ορισμός

Μια εκτιμήτρια ($\hat{\theta}$) χαρακτηρίζεται ως αποτελεσματική, ανάμεσα από ένα πλήθος εκτιμητριών, εάν είναι αμερόληπτη και έχει την ελάχιστη διακύμανση, συγκριτικά με τις υπόλοιπες αμερόληπτες εκτιμήτριες.

Άσκηση 2

Να εξεταστούν οι εκτιμήτριες της άσκησης 1 ως προς την αποτελεσματικότητα.

Η αποτελεσματικότητα προϋποθέτει αμεροληψία, οπότε εξετάζω <u>ΜΟΝΟ</u> τις αμερόληπτες εκτιμήτριες.

1. $Var(\hat{\theta}_1) = Var(\bar{x}) = Var(\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)) = \frac{1}{n^2} Var((\sum_{i=1}^{n} x_i))$

   $= \frac{1}{n^2}((\sum_{i=1}^{n} Var(x_i))) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Συνέχεια Άσκησης 2

4. $Var(\hat{\theta}_4) = Var(\frac{5x_1+2x_2+2x_3-5x_4+(x_5+...+x_n)}{n}) =$

   $\frac{1}{n^2}(5^2 Var(x_1) + 2^2 Var(x_2) + 2^2 Var(x_3) + 5^2 Var(x_4) + Var(x_5) + ... + Var(x_n)) =$

   $\frac{1}{n^2}(25\sigma^2 + 4\sigma^2 + 4\sigma^2 + 25\sigma^2 + (n-4)\sigma^2) =$

   $\frac{1}{n^2}(58\sigma^2 + n\sigma^2 - 4\sigma^2) = \frac{54\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{54\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n} > \frac{\sigma^2}{n} \Leftrightarrow Var(\hat{\theta}_4) > Var(\hat{\theta}_1)$. Άρα η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_1$ είναι πιο αποτελεσματική εκτιμήτρια.

Βασικές Έννοιες - Ορισμός

Μια εκτιμήτρια $(\hat{\theta})$ χαρακτηρίζεται ως συνεπής, όταν ικανοποιούνται τα εξής κριτήρια:

1. Η εκτιμήτρια είναι Αμερόληπτη, ή ασυμπτωτικά Αμερόληπτη ($\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) \to \Theta$)
2. $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) \to 0$

Άσκηση 3

Να εξεταστούν οι εκτιμήτριες της άσκησης 1 ως προς την συνέπεια.

1. Η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_1$ είναι αμερόληπτη και άρα ικανοποιείται το κριτήριο της Αμεροληψίας. Εξετάζω και το όριο της Διακύμανσης.

   $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_1) = \lim_{n\to\infty} Var(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$

   Άρα η $\hat{\theta}_1$ είναι συνεπής εκτιμήτρια.

Συνέχεια Άσκησης 3

2. Όπως έχουμε ήδη δείξει, η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_2$ δεν είναι αμερόληπτη. Θα εξετάσω αν είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη.

   $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_2) = \lim_{n\to\infty} E(\bar{x}+5) = \lim_{n\to\infty} E(\bar{x}+5) = \lim_{n\to\infty}(E(\bar{x}) + E(5)) = \mu + 5 \nrightarrow \mu$

   Άρα, αφού η $\hat{\theta}_2$ δεν είναι αμερόληπτη, αλλά ούτε και ασυμπτωτικά αμερόληπτη, τότε δεν είναι ούτε συνεπής εκτιμήτρια.

Συνέχεια Άσκησης 3

3. Όπως έχουμε ήδη δείξει, η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_3$ δεν είναι αμερόληπτη. Θα εξετάσω αν είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη.

   $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_3) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\mu}{n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\mu}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{10}{n}} = \mu$

   Οπότε, η $\hat{\theta}_3$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια.

   Θα εξετάσουμε το όριο της διακύμανσης της εκτιμήτριας.

   $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_3) = \lim_{n\to\infty} Var(\frac{1}{n+10}(\sum_{i=1}^{n} x_i)) =$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+10)^2} n\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sigma^2}{n^2+20n+100} =$
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sigma^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{20n}{n^2}+\frac{100}{n^2}} \to 0$. Άρα η $\hat{\theta}_3$ είναι συνεπής εκτιμήτρια.

Συνέχεια Άσκησης 3

4. Αφήνεται για εξάσκηση.

   Σημείωση: Η $\hat{\theta}_4$ είναι συνεπής.

   Όπως έχουμε δείξει η $\hat{\theta}_4$ είναι αμερόληπτη. Αρκεί να δείξουμε ότι το όριο της διακύμανσης της $\hat{\theta}_4$ τείνει στο μηδέν, όταν το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο.