Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Παράγωγες Κατανομές $X^2, t - Student, F$

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

22/3/2022

Βασικές Έννοιες

Έστω $Z_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την τυποποιημένη Κανονική Κατανομή N(0,1).

Ορίζουμε μια νέα τ.μ., έστω Y ως το άθροισμα των n αυτών τ.μ. υψωμένων στο τετράγωνο, ως εξής:

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + ... + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \tag{1}$$

Τότε, η τ.μ. Y ακολουθεί την Κατανομή X^2, με n βαθμούς ελευθερίας και γράφουμε $Y \sim X_n^2$.
Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. που ακολουθεί την X_n^2 κατανομή, δίνεται από τους εξής τύπους:

$$E(Y) = n \tag{2}$$

$$Var(Y) = 2n \tag{3}$$

Άσκηση 1

Έστω V και W δυο ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την τυποποιημένη Κανονική κατανομή N(0,1).
Ορίζουμε την τ.μ. U ως το άθροισμα τετραγώνων των V και W.

1. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. U
2. Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. U
3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(U > 7.378)$

Συνέχεια Άσκησης 1

1. Η τ.μ. U ορίζεται ως το άθροισμα τετραγώνων δυο τυποποιημένων κανονικών τ.μ., V και W. Οπότε μπορούμε να την γράψουμε ως εξής:
   $U = V^2 + W^2$, άρα $U \sim X_2^2$.
2. Από τον τύπο 2, μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της τ.μ. U η οποία είναι ίση με $E(U) = n = 2$.
   Αντίστοιχα, από τον τύπο 3, μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση της τ.μ. U η οποία είναι ίση με $Var(U) = 2n = 4$.

Συνέχεια Άσκησης 1

3. Από τον Πίνακα της Κατανομής X^2, μπορούμε να εντοπίσουμε την τιμή 7.378 στη γραμμή για 2 βαθμούς ελευθερίας, όπου η πιθανότητα είναι 0.025. Άρα $P(U > 7.378) = 0.025 = 2.5\ \%$
4. Έστω η τ.μ. U, η οποία ακολουθεί την κατανομή X^2, με 10 βαθμούς ελευθερίας. ($U \sim X^2_{10}$). Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(U > 3.25)$. **(Αφήνεται για εξάσκηση.)**

Βασικές Έννοιες

Έστω Z μια τ.μ. η οποία ακολουθεί την Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή, $Z \sim$ N(0,1) και έστω U, μια τ.μ. η οποία ακολουθεί την κατανομή X^2 με n βαθμούς ελευθερίας, ($U \sim X_n^2$), όπου Z και U ανεξάρτητες.
Ορίζουμε μια νέα τ.μ., έστω T ως εξής:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \tag{4}$$

Τότε, η τ.μ. T ακολουθεί την Κατανομή Student-t, με n βαθμούς ελευθερίας και γράφουμε $T \sim t_n$.

Βασικές Έννοιες

Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. που ακολουθεί την t_n κατανομή, δίνεται από τους εξής τύπους:

$$E(T) = 0, n \geq 3 \tag{5}$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2}, n \geq 3 \tag{6}$$

Άσκηση 2

Έστω $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ και $U \sim X^2_{15}$, όπου Z και U ανεξάρτητες.

1. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{U}{15}}}$
2. Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της τ.μ. T
3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(T > 1.753)$

Συνέχεια Άσκησης 2

1. Η τ.μ. T ακολουθεί την t_{15}
2. E(T)=0 και $Var(T) = \frac{n}{n-2} = \frac{15}{13}$
3. Από τον Πίνακα της Κατανομής Student-t
   $P(T > 1.753) = 0.05$

Βασικές Έννοιες

Έστω X μια τ.μ. που ακολουθεί την X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας ($X \sim X_n^2$) και έστω Y μια τ.μ. που ακολουθεί την X^2 κατανομή με m βαθμούς ελευθερίας ($Y \sim X_m^2$). Τότε

Ορίζουμε μια νέα τ.μ., έστω F, ως εξής:

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \tag{7}$$

Τότε, η τ.μ. F ακολουθεί την F κατανομή με n, m βαθμούς ελευθερίας ($F \sim F_{n,m}$)