Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Επανάληψη στις Κατανομές (Διωνυμική και Κανονική Κατανομή)

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

8/3/2022

Βασικές Έννοιες

Έστω X μια τ.μ. η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{X} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ο αριθμός των επιτυχιών,} \\ \text{σε πείραμα } n \text{ ανεξάρτητων δοκιμών,} \\ \text{με πιθανότητα επιτυχίας } p, \\ \text{με επανατοποθέτηση} \end{array} \right\}$$

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους n και p και γράφουμε $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

- Συνάρτηση Πιθανότητας : $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $P(X \leq x) = \sum_x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- Αναμενόμενη Τιμή: $E(X) = np$
- Διακύμανση: $Var(X) = np(1-p)$

Υπενθύμιση: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

Άσκηση 1

Γνωρίζουμε ότι μια μεγάλη παρτίδα λαμπτήρων περιέχει 10% ελαττωματικούς λαμπτήρες. Αν επιλέξουμε τυχαία 3 λαμπτήρες (με επανατοποθέτηση), ποια είναι η πιθανότητα:

1. Ακριβώς ένας λαμπτήρας να είναι ελαττωματικός;
2. Κανένας λαμπτήρας να μην είναι ελαττωματικός;
3. Τουλάχιστον ένας λαμπτήρας να είναι ελαττωματικός;
4. Πόσους ελαττωματικούς λαμπτήρες αναμένεται να βρω;
5. Με ποια διακυμανση;

Συνέχεια Άσκησης 1

Θα θεωρήσω την τ.μ.

$$X = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ο αριθμός των ελαττωματικών λαμπτήρων,} \\ \text{σε πείραμα } n = 3 \text{ ανεξάρτητων επιλογών λαμπτήρων,} \\ \text{με πιθανότητα επιτυχίας } p = 10\%, \\ \text{με επανατοποθέτηση} \end{array} \right\}$$

Τότε, η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n = 3$ και $p = 10\%$
και γράφουμε $X \sim \mathrm{B}(n = 3,\ p = 10\%)$.

1. $P(X = 1) = \binom{3}{1} 0.1^1 (1 - 0.1)^{3-1} = \left(\frac{3!}{1!(3-1)!}\right) 0.1 (0.9)^2 = 3 * 0.1 * 0.81 = 0.243 = 24.3\%$
2. $P(X = 0)$ **(Αφήνεται για εξάσκηση.)**

Συνέχεια Άσκησης 1

3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0.1^0 (1 - 0.1)^{3-0} = 1 - 0.729 = 0.271 = 27.1\%$
4. $\mathrm{E(X)} = n * p = 3*0.1 = 0.3$
5. $Var(\mathrm{X}) = n * p * (1 - p) = 3*0.1*0.9 = 0.27$

Βασικές Έννοιες

Έστω X μια τ.μ. η οποία ακολουθεί την Κανονική Κατανομή, με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.
Γράφουμε X $\sim$ N(μ,σ^2).

- Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας :
  $f_x(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$
- Η Κανονική Κατανομή είναι συμμετρική ως προς τη μέση της τιμή.

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής Κατανομής, εργαζόμαστε ως εξής:
Αν X $\sim$ N(μ,σ^2)
Τότε, $\frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim$ N(0,1)

Άσκηση 2

Έστω η τ.μ. X$\sim$ N(2,4).Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

1. $P(-0.4 < X < 6.44)$
2. $P(2.5 < X < 4.7)$

Συνέχεια Άσκησης 2

1. $P(-0.4 < X < 6.44) =$

   $P(\frac{-0.4-2}{\sqrt{4}} < \frac{X-2}{\sqrt{4}} < \frac{6.44-2}{\sqrt{4}}) =$

   $P(-1.2 < Z < 2.22) = P(Z < 2.22) - P(Z < -1.2) =$

   $P(Z < 2.22) - P(Z > 1.2) =$

   $P(Z < 2.22) - (1 - P(Z < 1.2)) =$

   $\Phi(2.22) + \Phi(1.2) - 1 = 0.9868 + 0.8849 - 1 = 0.8717 = 87.17\%$

Συνέχεια Άσκησης 2

3. $P(2.5 < X < 4.7) =$

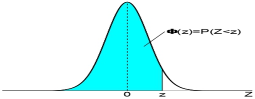
   $P(\frac{2.5-2}{\sqrt{4}} < \frac{X-2}{\sqrt{4}} < \frac{4.7-2}{\sqrt{4}}) =$

   $P(0.25 < Z < 1.35) = P(Z < 1.35) - P(Z < 0.25) =$

   $0.9115 - 0.5987 = 0.3128 = 31.28\%$

Πίνακας Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$z = 1.28 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.90$

$z = 1.65 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.95$

$z = 2.33 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.99$

$z = 3.08 \Longleftrightarrow \Phi(z) = 0.999$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998