(1)

# ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ

α) ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ Η ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ $r$ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ Τ.Μ. $X$ ΕΙΝΑΙ

$\mu_r = E(X^r)$.

ΕΣΤΩ $X_1, \ldots, X_n$ Τ.Δ. ΑΠΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ $X$. Η ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ (ΑΡΧΙΚΗ) ΡΟΠΗ $r$ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ $m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΕΧΕΙ ΩΣ ΕΞΗΣ:

ΕΣΤΩ $k$ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΟΥ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ. ΕΞΙΣΩΝΟΥΜΕ ΤΙΣ $k$ ΠΡΩΤΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΡΟΠΩΝ ΑΠΟ Τ.Δ. ΚΑΙ ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

②

ΠΑΡ (ΜΕΘΟΔΟΥ ΡΟΠΩΝ): ΕΣΤΩ $X \sim (\mu, \sigma^2)$ Τ.Μ.

ΚΑΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ $\mu$ ΚΑΙ $\sigma^2$.

ΑΠΑΝΤ: ΕΧΟΥΜΕ ΔΥΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ ΠΡΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ $\longrightarrow$ $K=2$.

ΕΧΟΥΜΕ $\mu_1 = E(X) = \mu$ ΚΑΙ $\mu_2 = E(X^2)$ (ΟΙ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΕΣ ΡΟΠΕΣ) ΚΑΙ $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ (ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ Τ.Δ. $X_1, \dots, X_n$ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ $X$).

ΕΞΙΣΩΝΟΥΜΕ $\mu_1$ ΜΕ $m_1$ ΚΑΙ $\mu_2$ ΜΕ

$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$ (ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΜΕ "ΚΑΠΕΛΑΚΙ" ΕΠΕΙΔΗ ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ)

ΚΑΙ $E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΜΑΣΤΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ $\hat{\sigma}^2$.

(3)

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $E(X^2) = VAR(X) + (E(X))^2$
(ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΟ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ)

$\rightarrow E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΑΣ ΔΙΝΕΙ

$$E(X^2) = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \hat{\sigma}^2 + \bar{X}^2$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

(ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΗ)

B) ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΕΣΤΩ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ $X$ ΚΑΙ ΕΣΤΩ Τ.Δ. $X_1, \dots, X_m$ ΑΠΟ $X$. ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ $\theta$ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ Τ.Δ.

④

ΓΙ' ΑΥΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ $\sum_{i=1}^{n} (X_i^r - E(X_i^r))^2$, (ΜΕ $E(X_i^r)$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ $\theta$).

<u>ΠΑΡ</u>: ΙΔΙΟ ΠΑΡ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΡΟΠΩΝ.

ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $\mu$: ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ

$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ (ΕΔΩ $r = 1 \to E(X_i^1) = \mu$).

- ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΚΡΙΣΙΜΟ ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ

$1^{\eta}$ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $= 0$:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right]'_{\mu} = ((X_1 - \mu)^2)'_{\mu} + \cdots + ((X_n - \mu)^2)'_{\mu}$$

$$= 2(X_1 - \mu)(-1) + \cdots + 2(X_n - \mu)(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu) = 0$$

(ΔΕΙΚΤΗΣ $\mu$: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ $\mu$)

$$\Leftrightarrow \sum X_i - n\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X}$$

- ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΣΗΜΕΙΟ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΔΙΟΤΙ $\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right]'' = 2n > 0$

(5)

ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $\sigma^2$: ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ

$\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - E(X_i^2))^2$, ΜΕ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ.
(ΕΔΩ $r=2$)

- ΚΡΙΣΙΜΟ ΣΗΜΕΙΟ:

$$\left((X_1^2 - E(X_1^2))^2 + \dots + (X_n^2 - E(X_n^2))^2\right)'_{\sigma^2} = 0$$

$$= \left(X_1^2 - (\sigma^2 + \bar{X}^2)\right)^2 + \dots + \left(X_n^2 - (\sigma^2 + \bar{X}^2)\right)'$$

ΑΦΟΥ $\hat{\mu} = \bar{X}$ ΑΠΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ

$$= 2(X_1^2 - (\sigma^2 + \bar{X}^2))(-1) + \dots + 2(X_n^2 - (\sigma^2 + \bar{X}^2))(-1)$$

$$= -2(X_1^2 + \dots + X_n^2) + \underbrace{2n(\sigma^2 + \bar{X}^2)}_{} = 0$$

(ΑΦΟΥ $\sigma^2 + \bar{X}$ ΕΧΕΙ ΠΡΟΣΤΕΘΕΙ $n$ ΦΟΡΕΣ)

ΔΗΛΑΔΗ

$$-\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + n(\sigma^2 + \bar{X}^2) = 0$$

$$\Rightarrow n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

ΕΠΙΣΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΟΤΙ 2η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $>0$

$\Rightarrow$ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΙΔΙΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΜΕ ΑΥΤΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΡΟΠΩΝ.

⑥

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧ. ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ.

γ) ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ Ε ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΥΧΑΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΠΟΥ ΕΚΤΕΛΕΣΑΜΕ, ΚΑΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ θ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ "ΠΙΣΩ" ΑΠΟ ΤΟ ΤΥΧΑΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΥΤΟ. ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΘΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ Ε, ΔΗΛΑΔΗ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΣΥΜΒΕΙ Ε. Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΗΘΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ θ (ΓΙ'ΑΥΤΟ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΩΣ $P(E,\theta)$). ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΩΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΗΣ θ ΑΥΤΗΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ Ε ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΠΙΘΑΝΟ ΝΑ ΣΥΜΒΕΙ. ΣΥΝΗΘΩΣ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΤΙΜΗ $\hat{\theta}$ ΠΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ $P(E,\theta)$.

ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ΕΜΠ (ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ) ΤΟΥ $\theta$ ΕΙΝΑΙ Η ΤΙΜΗ $\hat{\theta}$ ΤΟΥ $\theta$ ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ ΤΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΘΕΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ Ε ΝΑ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΔΥΝΑΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΣΥΜΒΕΙ ΥΠΟ ΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ $L(\theta)=P(E,\theta)$

(Ή $L(\theta)=k\cdot P(E,\theta)$ ΟΠΟΥ $k$ = ΣΤΑΘΕΡΑ)

$L(\theta)$ = ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ.

ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ, ΓΙΑ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ, ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ $\ell(\theta)=\ln L(\theta)$ ΑΝΤΙ $L(\theta)$, ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΟΥΜΕ $\ell(\theta)$ ΑΝΤΙ $L(\theta)$ (ΔΙΟΤΙ Η ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\theta$ ΠΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ $\ell(\theta)$ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ ΚΑΙ $L(\theta)$).

ΠΑΡ (ΓΙΑ ΕΜΠ)

ΕΣΤΩ X ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ $\sim N(\mu, \sigma^2)$

(ΕΔΩ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ)

ΚΑΙ $\theta = (\mu, \sigma^2)$

ΕΣΤΩ $X_1, \dots, X_n$ Τ.Δ. ΑΠΟ X

($\Leftrightarrow$ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ΚΑΙ $X_i$ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.)

$$\to f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

(exp = ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

$$L(\theta) = L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)\cdots f(x_n)$$

(Π ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΙ ΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ)

$$\Rightarrow L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

↳ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

(ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $f(x,y)=x^2+2y^3$

ΠΟΙΕΣ ΕΙΝΑΙ $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$;

$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$ (ΕΔΩ $y$ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ)

↳ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$f'_y(x,y) = 6y^2 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ (ΕΔΩ $x$ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ))

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡ: ΕΠΕΙΔΗ ΕΧΟΥΜΕ EXP ΣΤΗΝ $L(\mu,\sigma^2)$, ΘΕΩΡΟΥΜΕ

$$\ell(\mu,\sigma^2) = \ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

ΚΑΙ ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = 0 \end{cases}$$

ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ ΜΕ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} \\ -\frac{n}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \end{cases}$$

ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΙΔΙΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΜΕ ΑΥΤΕΣ ΠΟΥ ΒΡΗΚΑΜΕ ΣΤΙΣ 2 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ.

ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΤΗ Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ. ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ: ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.