ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ : ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

• ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗΣ

ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ: ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΠΟΥ ΑΣΧΟΛΕΙΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ.

ΠΑΡ: ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΣΗΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΩΝ ΥΣΤΕΡΑ ΑΠΟ ΔΙΑΦΗΜΙΣΤΙΚΗ ΚΑΜΠΑΝΙΑ (ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ ΠΡΟΙΟΝ)

Η ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΓΙΝΕΤΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΕΝΑ Τ. Δ. ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ.

ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ: ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΧΑΡΗ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΕΚΤΙΜΑΤΑΙ Η ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ.

ΘΑ ΔΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΝΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ (ΔΕΔΟΜΕΝΗΣ) ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΑΥΤΗ ΣΥΓΚΡΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΑΛΛΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΜΕ ΣΤΗΝ ΔΙΑΘΕΣΗ ΜΑΣ.

(2)

• ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΘΟΡΙΣΟΥΜΕ ΜΙΑ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΤΙΜΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ ΠΟΥ ΖΗΤΑΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ. ΓΙΑ ΝΑ ΤΟ ΠΕΤΥΧΟΥΜΕ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΜΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥ Τ.Δ. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΗ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΑΥΤΗ Τ.Μ.

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΠΟΥ ΠΑΙΡΝΕΙ Η ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ Τ.Δ. ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗ.

ΒΑΣΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ "ΚΑΛΕΣ" ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ. ΕΝΑ "ΚΛΑΣΙΚΟ" ΠΑΡ. ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ $\bar{X}$ ΩΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΟΥ ΜΕΣΟΥ μ.

③

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ

- ΜΙΑ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $\hat{\theta}_m$ ΤΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ θ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ <u>ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ</u> ΑΝ $E(\hat{\theta}_m) = \theta$

ΜΙΑ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΙΝΑΙ $E(\hat{\theta}_m) - \theta$.

ΠΑΡ: Ο ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ $\bar{X}$ (ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ Τ.Δ. $X_1, \ldots, X_m$ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ) ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΟΥ ΜΕΣΟΥ μ, ΔΗΛΑΔΗ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $E(\bar{X}) = \mu$ (ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡ. $\bar{X} = \hat{\theta}$ ΚΑΙ $\mu = \theta$)

ΓΙΑ ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ $E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_1^m X_i}{m}\right)$

4

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right)$$

ΚΑΙ $E(X_1) = \cdots = E(X_n) = \mu$

(ΑΦΟΥ $\mu = E(X)$)

$$\Rightarrow E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(\underbrace{\mu + \cdots + \mu}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}}) = \frac{1}{\cancel{n}}(\cancel{n}\mu) = \mu.$$

ΑΝΤΙΘΕΤΩΣ Η ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ S^2 ΤΗΣ σ^2 (ΟΠΟΥ σ^2 = ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΔΙΟΤΙ

$$E(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \neq \sigma^2$$

ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ

ΕΝΩ Η ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΔΗΛΑΔΗ

$E(S^{*2}) = \sigma^2.$

5

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

ΕΣΤΩ 5 ΑΤΟΜΑ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΕΝΑ ΠΛΗΘΥΣΜΟ. ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΔΙΝΕΤΑΙ ΤΟ ΒΑΡΟΣ ΤΟΥΣ.(ΣΕ ΚΙΛΑ).

	A	B	C	D	E
X:	70	78	82	73	65

ΠΩΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ $\overline{X}$ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΟΥ μ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ Τ.Δ. 2 ΑΤΟΜΩΝ;

<u>Απ.</u>: • ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\mu = \frac{\Sigma X_i}{5}$

$$= \frac{70+78+82+73+65}{5} = 73.6 \text{ (ΚΙΛΑ)}$$

• ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΟΛΑ ΤΑ ΔΥΝΑΤΑ Τ.Δ. 2 ΑΤΟΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥΣ ΤΟΥΣ ΜΕΣΟΥΣ: ΠΟΣΑ Τ.Δ. ΕΧΟΥΜΕ; → $C_5^2 = 10$

ΔΗΛΑΔΗ
$$\text{10 Τ.Δ. 2 ΑΤΟΜΩΝ}\left\{\begin{array}{l} (A\ B) \to 74 \\ (B\ C) \to 80 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right.$$

↑
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΙ ΜΕΣΟΙ

⑥

ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΜΕΣΟ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΠΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΑΜΕ

ΔΗΛΑΔΗ $\frac{74+80+\cdots}{10} = 73.6$

(ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ $E(\bar{X})$)

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $E(\bar{X}) = \mu$.

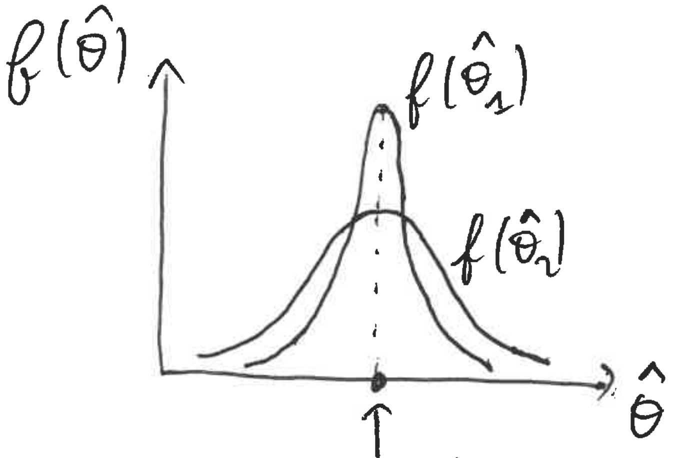
ΣΥΝΕΠΩΣ, ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΣΤΑ ΧΡΗΣΙΜΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ X^2, t, και F, ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ:

- $$\frac{n S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1) S^{*2}}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$$

- $$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- $$\frac{\left(\dfrac{\frac{n}{n-1} S_x^2}{\sigma_x^2}\right)}{\left(\dfrac{\frac{m}{m-1} S_y^2}{\sigma_y^2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{S_x^{*2}}{\sigma_x^2}\right)}{\left(\dfrac{S_y^{*2}}{\sigma_y^2}\right)} \sim F(n-1, m-1)$$

ΕΣΤΩ $\hat{\theta}_1$ ΚΑΙ $\hat{\theta}_2$ ΔΥΟ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ θ. $\hat{\theta}_1$ ΕΧΕΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΑΠΟ $\hat{\theta}_2$ ΑΝ $VAR(\hat{\theta}_1) < VAR(\hat{\theta}_2)$. Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ (→ ΔΕΙΚΤΗΣ) ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΕΤΡΗΘΕΙ ΑΠΟ $\frac{VAR(\hat{\theta}_1)}{VAR(\hat{\theta}_2)}$.



$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$ (ΑΜΕΡΟΛΗΨΙΑ)

ΚΑΙ $VAR(\hat{\theta}_1) < VAR(\hat{\theta}_2)$

ΔΗΛΑΔΗ ΠΙΟ "ΑΚΡΙΒΗΣ" ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΕΙΝΑΙ $\hat{\theta}_1$.

ΟΤΑΝ ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΜΕ > 2 ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΑΠΛΑ ΝΑ ΕΝΤΟΠΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ.

⑧

ΕΣΤΩ $X \sim (\mu, \sigma^2)$ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΣΤΩ ΤΑ Τ.Δ. $X_1, ---, X_{10}$ ΚΑΙ X_1, X_2 ΑΠΟ X, ΕΣΤΩ $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ ΚΑΙ $\hat{\mu}_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΤΟΥ μ.

ΠΟΙΑ Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $\hat{\mu}_1$ ΠΡΟΣ $\hat{\mu}_2$;

ΑΠΑΝΤ: ΟΙ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΑΥΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΟ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΕΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ($E(\hat{\mu}_2) = E\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]$

$$= \frac{1}{2} E(X_1+X_2) = \frac{1}{2}\left(E(X_1)+E(X_2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\mu+\mu) = \mu.$$

ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΓΙΑ $\hat{\mu}_1$).

(ΣΗΜΕΙΩΣΤΕ ΟΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ >1 ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΕΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ).

ΤΩΡΑ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ..

$$VAR(\hat{\mu}_1) = VAR(\bar{X}) = VAR\left[\frac{1}{10}(X_1+---+X_{10})\right]$$
$$= \frac{1}{100} VAR(X_1+---+X_{10})$$
$$= \frac{1}{100}\left(VAR(X_1)+---+VAR(X_{10})\right)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

9

ΠΡΟΣΟΧΗ!: Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΕΠΕΙΔΗ ΤΑ X_i ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ (ΑΦΟΥ ∈ Τ.Δ.) ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ $cov(X_i, X_j) = 0$ ΓΙΑ $i \neq j$.

ΑΡΑ: $VAR(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{100}(\underbrace{\sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{10 \text{ ΦΟΡΕΣ}})$

ΑΦΟΥ $VAR(X_i) = VAR(X) = \sigma^2$

$\Rightarrow VAR(\hat{\mu}_1) = \left(\frac{10}{100}\right)\sigma^2 = \sigma^2/10$

(ΓΕΝΙΚΑ: ΑΝ ΕΙΧΑΜΕ Τ.Δ. ΜΕΓΕΘΟΥΣ n ΤΟΤΕ $VAR(\bar{X}) = \sigma^2/n$)

ΕΔΩ $n = 10$.

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ

$VAR(\hat{\mu}_2) = \frac{\sigma^2}{2}$ (ΕΔΩ $n = 2$).

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $VAR(\hat{\mu}_1) < VAR(\hat{\mu}_2)$

$\Rightarrow \hat{\mu}_1$ ΣΧΕΤΙΚΑ ΠΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ (Ή ΠΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ) ΑΠΟ $\hat{\mu}_2$.

Ο ΔΕΙΚΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ $= VAR(\hat{\mu}_1)/VAR(\hat{\mu}_2) = \frac{(\sigma^2/10)}{\sigma^2/2} = \frac{1}{5}$

(10)

Η ΤΙΜΗ 1/5 ΠΟΥ ΒΡΗΚΑΜΕ ΕΡΜΗΝΕΥΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ: Η ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $\hat{\mu}_2$ ΑΠΑΙΤΕΙ 5 ΦΟΡΕΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΝΑ ΠΕΤΥΧΕΙ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $\hat{\mu}_1$.

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $X \sim (\mu, \sigma^2)$ ΚΑΙ ΕΣΤΩ X_1, X_2 Τ.Δ. ΑΠΟ X.

ΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΤΟΥ μ ΕΙΝΑΙ ΠΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ;

$$\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + 2X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{X_1 + 2X_2}{3},$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}$$

1) ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΠΟΙΑ (ΠΟΙΕΣ) ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ (ΕΣ).

$$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{X_1 + 2X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[E(X_1) + E(2X_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(E(X_1) + 2E(X_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\mu + 2\mu) = \frac{3\mu}{2} \neq \mu$$

$\rightarrow \hat{\theta}_1$ ΜΕΡΟΛΗΠΤΙΚΗ

11

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left(\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left[E(X_1) + E(2X_2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[E(X_1) + 2E(X_2)\right] = \frac{1}{3}(\mu + 2\mu)$$

$= \mu \rightarrow$. $\hat{\theta}_2$ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ

$$E(\hat{\theta}_3) = E\left(\frac{2X_1 + 3X_2}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[E(2X_1) + E(3X_2)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(2E(X_1) + 3E(X_2)\right)$$

$= \frac{1}{5}(2\mu + 3\mu) = \mu \rightarrow \hat{\theta}_3$ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ

ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΜΟΝΟ ΟΣΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΕΣ.
(ΔΗΛΑΔΗ $\hat{\theta}_2$ ΚΑΙ $\hat{\theta}_3$)

$$VAR(\hat{\theta}_2) = VAR\left(\frac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \frac{1}{9} VAR(X_1\ X_2)$$

$$= \frac{1}{9}\left[VAR(X_1) + 4VAR(X_2) + 4COV(X_1, X_2)\right]$$

ΟΜΩΣ $COV(X_1, X_2) = 0$ ΛΟΓΩ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ ΤΩΝ X_1, X_2.

$$\rightarrow VAR(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{9}\left(VAR(X_1) + 4VAR(X_2)\right)$$

$$= \frac{1}{9}(\sigma^2 + 4\sigma^2) = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$\nearrow$ ΑΦΟΥ $VAR(X_i) = VAR(X)$
$i = 1, 2$

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $VAR(\hat{\theta}_3)$ (ΑΦΗΝΕΤΑΙ ΩΣ ΑΣΚΗΣΗ)

$$VAR(\hat{\theta}_3) = \frac{13}{25}\sigma^2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $VAR(\hat{\theta}_3) < VAR(\hat{\theta}_2)$

$\rightarrow \hat{\theta}_3$ ΠΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΗ.

- ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΟΤΙ $\hat{\theta}_n$ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΙΑΚΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ θ ΚΑΙ $\hat{\theta}_n$ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ Τ.Δ. $X_1, \dots, X_n$ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ.

ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΩΣ ΜΕΣΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

$$MSE(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2].$$

ΑΝ $\lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\theta}_n) = 0$ ΤΟΤΕ $\hat{\theta}_n$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΠΗΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ.

ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ ΜΕ: ΑΝ $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$ (1η ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ)

ΚΑΙ $\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0$ (2η ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ)

ΤΟΤΕ $\hat{\theta}_n$ ΕΙΝΑΙ <u>ΣΥΝΕΠΗΣ</u> ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ!

(13)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η 1η ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ ΔΗΛΑΔΗ $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\Theta}_n) = \theta$ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΕ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΜΕΡΟΛΗΨΙΑ.

ΠΑΡ 1: ΕΣΤΩ $X_1, \dots, X_n$ Τ.Δ. ΑΠΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ΕΙΝΑΙ $\bar{X}$ ΣΥΝΕΠΗΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΟΥ μ;

ΑΠΑΝΤ.

- $E(\bar{X}) = \mu$ (ΓΝΩΣΤΟ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ)

$\to$ ΙΣΧΥΕΙ Η 1η ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ

- $VAR(\bar{X}) = \sigma^2/n$ (ΓΝΩΣΤΟ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ)

$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} VAR(\bar{X}) = 0$

$\to$ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ Η 2η ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ

$\to$ $\bar{X}$ ΣΥΝΕΠΗΣ

ΠΑΡ 2. ΔΙΝΕΤΑΙ Η ΙΔΙΑ ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΜΕ ΠΑΡ 1.

ΕΙΝΑΙ Η $\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ΣΥΝΕΠΗΣ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΟΥ μ;

(14)

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $E(\hat{\theta}_n)$ ΚΑΙ $VAR(\hat{\theta}_n)$.

- $E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$= \frac{1}{n-1}\left[E(X_1)+\dots+E(X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}(\underbrace{\mu+\dots+\mu}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}}) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\mu$$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \mu$ (ΙΣΧΥΕΙ Η 1^{η} ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ)

- $VAR(\hat{\theta}_n) = VAR\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$$= \frac{1}{(n-1)^2} VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\left[VAR(X_1)+\dots+VAR(X_n)\right]$$

↳ ΔΙΟΤΙ $COV(X_i, X_j) = 0, \ \forall i \neq j$

$\rightarrow VAR(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{(n-1)^2}(\underbrace{\sigma^2+\dots+\sigma^2}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}})$

$$= \left(\frac{n}{(n-1)^2}\right)\cdot\sigma^2$$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0$ (ΙΣΧΥΕΙ Η 2^{η} ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ)

$\rightarrow \hat{\theta}_n$ ΣΥΝΕΠΗΣ.

(ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\hat{\theta}_n$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΑΦΟΥ $E(\hat{\theta}_n) \neq \mu$, ΟΜΩΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΠΗΣ)