1

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

χ^2 ΚΑΤΑΝΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΗΣ)

ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ Γ ΩΣ ΕΞΗΣ:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{t-1}\, dy \quad , \quad t > 0$$

ΜΕ $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = 1$

ΚΑΙ $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

ΓΙΑ $t = p$ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ > 1

ΙΣΧΥΕΙ Η ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

$$\Gamma(p) = (p-1)\cdot\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\,\Gamma(p-2)$$
$$= \cdots = (p-1)(p-2)\cdots 1.\,\Gamma(1)$$
$$= (p-1)(p-2)\cdots 1 = (p-1)!$$

ΕΣΤΩ $X \sim \chi^2(p)$ (X = Τ.Μ.)

p = ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ (Β.Ε.) ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ, ΚΑΙ $p > 0$ ΑΚΕΡΑΙΟΣ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΑΣ ΤΗΣ X: $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(p/2)\,.\,2^{p/2}}\, e^{-x^2/2} \cdot x^{\frac{p}{2}-1}$

ΚΑΙ $0 \le x < \infty$

②

• ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ;

ΕΣΤΩ $X_1 \sim N(0,1), ---, X_p \sim N(0,1)$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

ΤΟΤΕ $X_1^2 + --- + X_p^2 \sim \chi^2(p) = \chi^2_p$

• ΕΣΤΩ ΟΤΙ $X \sim \chi^2(p)$

ΤΟΤΕ $E(X) = p$ ΚΑΙ $VAR(X) = 2p$

ΔΗΛΑΔΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ = 2 × ΜΕΣΟ

〃

ΜΑΘ.

ΕΛΠΙΔΑ

ΕΙΝΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ χ^2.

ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $p = 1 \Leftrightarrow X \sim \chi^2(1)$

ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΟΤΙ $E(X) = 1$;

ΔΙΟΤΙ: ΕΣΤΩ $X = Y_1^2$ ΜΕ $Y_1 \sim N(0,1)$

$\Rightarrow VAR(Y_1) = 1$ ΚΑΙ $E(Y_1) = 0$

ΣΥΝΕΠΩΣ $E(Y_1^2) = VAR(Y_1) + (E(Y_1))^2$

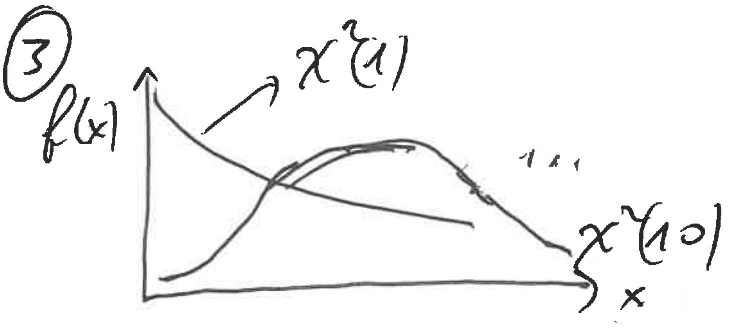
$= 1 + 0 = 1$

ΟΜΩΣ $Y_1^2 = X \Rightarrow E(X) = 1$

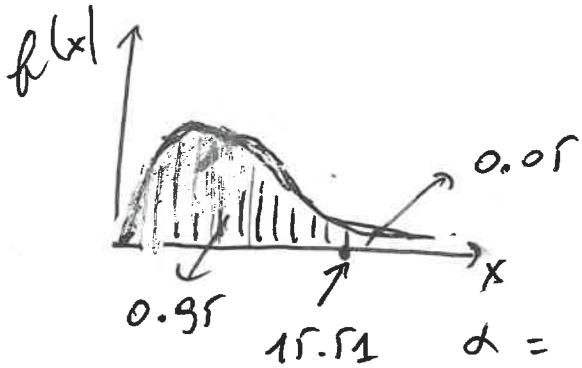
• ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: ΟΣΟ p ΠΙΟ ΜΙΚΡΟ ΤΟΣΟ ΠΙΟ ΜΕΓΑΛΗ Η ΘΕΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ χ^2

ΟΣΟ p ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ ΤΟΣΟ χ^2 ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΙΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ

③



- ΟΙ ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ χ^2 ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΙΝΑΚΕΣ



α = ΜΙΚΡΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΥΝΗΘΩΣ $= 0.05,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.025$

ΠΙΝΑΚΑΣ → ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΤΙΜΕΣ ΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥΣ Β.Ε.

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $X \sim \chi^2_{8,\,0.95}$ ΔΗΛΑΔΗ $\alpha = 0.05$, $p = 8$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

$P(X \le \chi^2_{8,\,0.95}) = P(X \le 15.51)$ ← ΠΙΝΑΚΕΣ

$= 0.95 =$ ΕΠΙΣΚΙΑΣΜΕΝΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΑΠΟ ΤΙΜΗ 15.51

ΕΠΙΣΗΣ $P(X > 15.51) = 0.05 = \alpha$

4

- ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

  ΓΙΑ $p \geq 30$

  $\sqrt{2X} - \sqrt{2p-1} \sim N(0,1)$ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

- ΧΡΗΣΙΜΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

  ΕΣΤΩ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ,

  ΚΑΙ ΕΣΤΩ Τ.Δ. $X_1, \ldots, X_n$ ΑΠΟ ΤΟΝ

  ΠΛΗΘΥΣΜΟ X. (ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ

  $\forall i = 1, \ldots, n, \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$).

  ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ: $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ $\left(\text{ΔΙΟΤΙ} = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}\right)$

  ΟΠΟΥ $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ $\leftrightarrow$ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ

  ΤΥΠΟΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΜΟΝΟ ΠΟΥ

  ΤΩΡΑ ΕΦΑΡΜΟΖΕΤΑΙ ΣΤΟ Τ.Δ.

  (ΚΑΙ ΟΧΙ ΣΤΟΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟ) $\Rightarrow$ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΠΑΡ.): ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΣΕ ΜΙΑ ΠΟΛΗ Η ΕΤΗΣΙΑ

ΔΑΠΑΝΗ ΓΙΑ ΚΡΕΑΣ ΜΙΑΣ ΤΕΤΡΑΜΕΛΟΥΣ

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ $\sim N(\mu, \underset{\text{ΧΙΛ. ΕΥΡΩ}}{\sigma = 0.2})$

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ Τ.Δ. 15 ΤΕΤΟΙΩΝ

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ. ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ S

ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΑΠΟ 0.3; (ΧΙΛ. ΕΥΡΩ)

(5)

ΖΗΤΑΜΕ $P(S>0.3) = P(S^2>0.09)$

$$= P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} > \frac{0.09\,(15)}{0.04}\right)$$

ΟΜΩΣ $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ:

$$P(\chi^2_{15-1} > 33.75) = P(\chi^2_{14} > 33.75)$$

$$\approx 0.005$$

(Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΝΕΙ ΤΙΜΗ ΓΙΑ $\alpha = 0.005$ ΣΕ 14 Β.Ε.)

<u>STUDENT t ΚΑΤΑΝΟΜΗ</u> (ΣΥΝΕΧΗΣ)

ΕΣΤΩ X = Τ.Μ. ΚΑΙ $X \sim t(p)$

p = Β.Ε. = 1, 2, ...

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot p} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}}$$

ΚΑΙ $-\infty < x < +\infty$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ t ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ $E(X) = 0$ (ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $p \geq 2$)

⑥

$VAR(X) = \frac{p}{p-2}$ (ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $p \geq 3$)

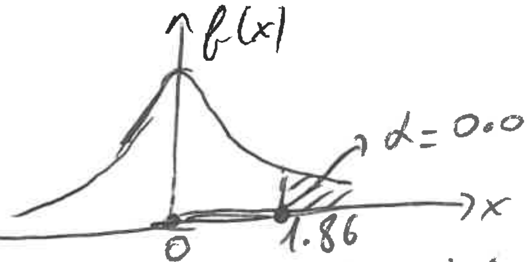
ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ;

ΕΣΤΩ $Z \sim N(0,1)$ ΚΑΙ $U \sim X^2(p)$ ΚΑΙ

Z ΚΑΙ U ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

Η Τ.Μ. $t = \frac{Z}{\sqrt{U/p}} \sim t(p) = t_p$

ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ



ΠΑΡ1 ΕΣΤΩ ΟΤΙ $\cancel{X} \sim t(8, 0.95) = t_{8, 0.95}$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

$P(t > 1.86) = 0.05$

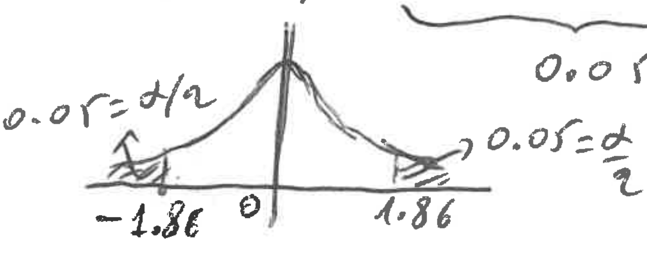
ΠΙΝΑΚΕΣ

(ΔΗΛΑΔΗ $P(t \leq 1.86) = 0.95$)

ΠΑΡ2

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

$P(|t| > 1.86) = \underbrace{P(t > 1.86)}_{0.05} + \underbrace{P(t < -1.86)}_{0.05}$



$= 0.1$

(7)

- ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ;

ΓΙΑ $p > 30$ $\quad t(p) \sim N(0,1)$

ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

- ΧΡΗΣΙΜΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

ΕΣΤΩ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ΚΑΙ ΕΣΤΩ $X_1, \dots, X_n$ Τ.Δ. ΑΠΟ Χ.

ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$

(ΔΙΟΤΙ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΩΣ $\dfrac{\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{\dfrac{nS^2}{\sigma^2}/(n-1)}}$)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:
(ΠΑΡ)

ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΕΤΗΣΙΑ ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗ (ΣΕ ΧΙΛ. ΕΥΡΩ) ΜΙΑΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΩΝ ΜΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ Τ.Μ. Χ ΜΕ ΜΕΣΟ $\mu = 5$. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ Τ.Δ. 17 ΤΕΤΟΙΩΝ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΩΝ ΚΑΙ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ Τ.Δ. $S = 1.36$. ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ Ο ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ > 6; (ΧΙΛ. ΕΥΡΩ)

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1) = t_{n-1}$

ΚΑΙ $S/\sqrt{n-1} = \frac{1.36}{\sqrt{16}} = 0.34$

ΖΗΤΑΜΕ $P(\bar{X}>6) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} > \frac{6-\mu}{0.34}\right)$

ΚΑΙ $\mu = 5$

$$= P\left(t(16) > \frac{6-5}{0.34}\right)$$

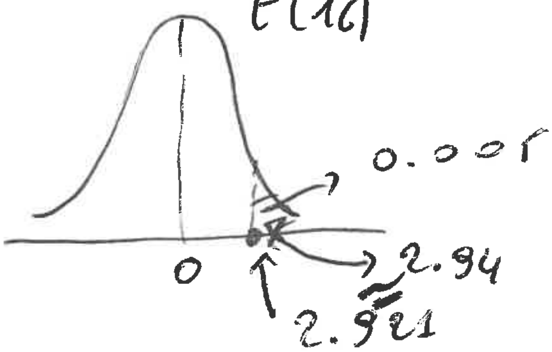
$$= P(t(16) > 2.94)$$

$$\approx 0.005$$

(ΣΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ $P(t(16) > 2.921) = 0.005$)

ΚΡΙΣΙΜΗ ΤΙΜΗ ΠΙΝΑΚΑ

ΔΗΛΑΔΗ



⑨

FISHER-SNEDECOR F ΚΑΤΑΝΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΗΣ)

- ΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ;

ΕΣΤΩ ΟΤΙ $U \sim X^2(r_1)$ ΚΑΙ $V \sim X^2(r_2)$ ΚΑΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ U, V ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

ΤΟΤΕ Η Τ.Μ. $F = \dfrac{U/r_1}{V/r_2} \sim F(r_1, r_2) = F_{r_1, r_2}$

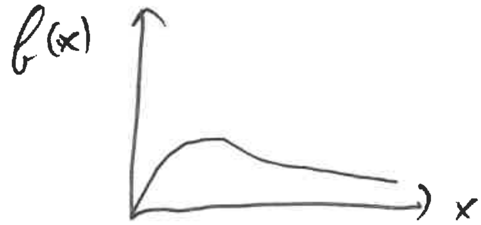
$\to$ 2 ΔΕΙΚΤΕΣ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

- $E(X) = \dfrac{r_2}{r_2 - 2}$ ΚΑΙ $r_2 > 2$

$VAR(X) = \dfrac{2r_2^2(r_1 + r_2 - 2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}$ ΚΑΙ $r_2 > 4$

- ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



- ΠΙΝΑΚΕΣ: ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ F ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ α $(0.01, 0.05, \ldots)$

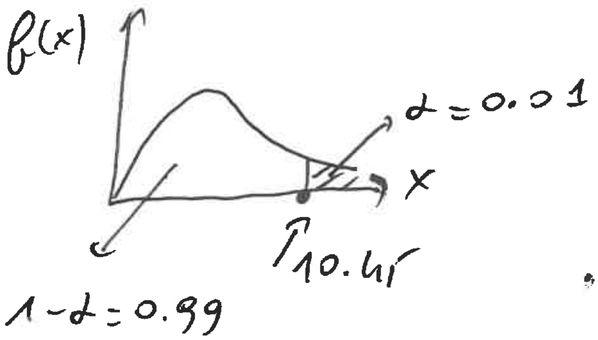
ΠΑΡ. ΕΣΤΩ $X \sim F(7, 5)$

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΡΙΘΜΟΣ c ΤΕΤΟΙΟΣ ΩΣΤΕ

$P(X > c) = 0.01$

(10)

ΠΑΜΕ ΣΤΟΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ ΠΟΥ ΑΦΟΡΑ ΣΤΟ $\alpha = 0.01$. ΕΝΤΟΠΙΖΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΤΗΝ ΣΕΙΡΑ 7 ΚΑΙ ΣΤΗΛΗ 5 ΚΑΙ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ $c = 10.45$



(ΙΣΧΥΕΙ ΕΠΙΣΗΣ ΟΤΙ $P(X \leq 10.45) = 0.99$)

• ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$F_{r_1, r_2, \alpha} = \frac{1}{F_{r_2, r_1, 1-\alpha}}$$

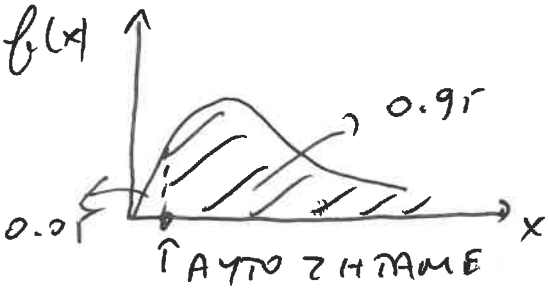
ΠΑΡ: ΕΣΤΩ $X \sim F_{3,9}$

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΡΙΘΜΟΣ c ΤΕΤΟΙΟΣ ΩΣΤΕ

$P(X > c) = 0.95$

(ΔΗΛΑΔΗ $P(X \leq c) = 0.05$)

ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΤΟ ΔΟΥΜΕ ΑΜΕΣΑ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ



(11)

ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ c ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ:

$$P(X > c) = P\left(\frac{1}{X} < \frac{1}{c}\right) = 0.95$$

ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ:

ΕΣΤΩ $\frac{1}{X} = Y$

$$\Rightarrow P\left(Y < \frac{1}{c}\right) = 0.95 \quad \text{ΜΕ } Y \sim F_{9,3}$$

ΤΩΡΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ c ΑΠΟ ΠΙΝΑΚΑ:

$$F_{9,3} = 8.81 \quad \text{ΓΙΑ } \alpha = 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = 8.81 \Rightarrow c = \frac{1}{8.81} = 0.1135$$

- ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $t_n^2 = F_{1,n}$

(ΔΙΟΤΙ $t_n^2 = \frac{Z^2}{(U/n)}$ ΜΕ $Z^2 \sim \chi^2(1)$ ΚΑΙ $U \sim \chi^2(n)$

ΚΑΙ Z, U ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ)

ΠΑΡ: $t(7) = 2.365$ ΓΙΑ $\alpha = 0.025$

$$\Rightarrow t^2(7) = (2.365)^2 = 5.59$$

ΚΑΙ $F(1,7) = 5.59$ ΓΙΑ $\alpha = 0.05$

* ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ ΤΙΜΕΣ α.

- ΧΡΗΣΙΜΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΣΤΩ $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ΚΑΙ $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

ΚΑΙ X, Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

ΕΣΤΩ $X_1, \dots, X_n$ Τ.Δ. ΑΠΟ X ΚΑΙ

$Y_1, \dots, Y_m$ Τ.Δ. ΑΠΟ Y.

ΤΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ:

$$F = \frac{\left(\dfrac{\frac{n}{n-1} S_x^2}{\sigma_x^2}\right)}{\left(\dfrac{\frac{m}{m-1} S_y^2}{\sigma_y^2}\right)} \sim F(n-1, m-1)$$

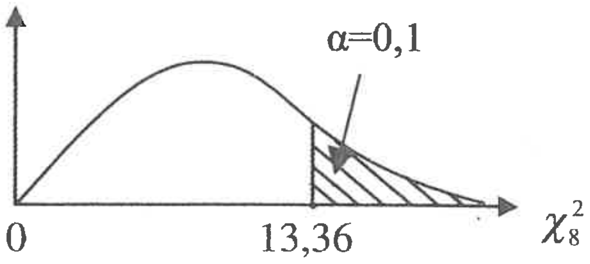
(ΔΙΟΤΙ $\dfrac{n S_x^2}{\sigma_x^2} = \dfrac{\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_x^2} \sim \chi^2(n-1)$

ΚΑΙ $\dfrac{m S_y^2}{\sigma_y^2} = \dfrac{\sum_1^m (Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma_y^2} \sim \chi^2(m-1)$

ΚΑΙ S_x^2, S_y^2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ)

Πίνακας Π.3: χ^2 κατανομή

Παράδειγμα:

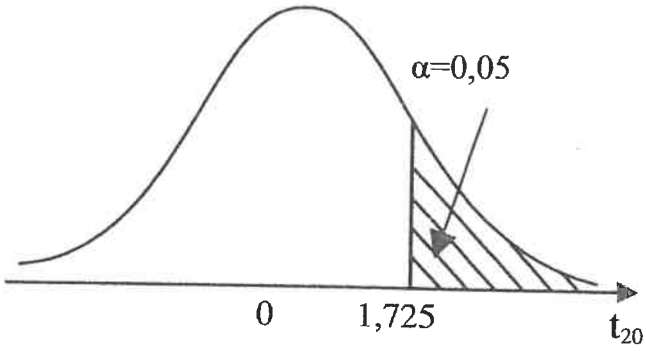


Βαθ.	Πιθανότητα α									
ελ. ν	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,90**	**0,10**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Πηγή: Οι τιμές παρήχθησαν με τη συνάρτηση CHIINV του Excel.

Πίνακας Π.4: Η κατανομή t

Παράδειγμα:



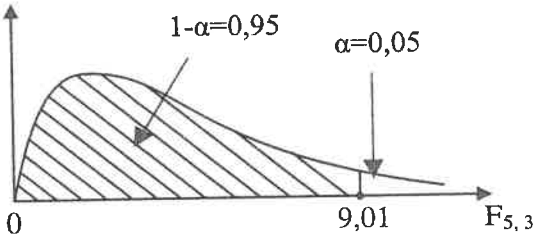
	α				
Βαθμοί ελ. ν	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Πηγή: Οι τιμές παρήχθησαν με τη συνάρτηση TINV του Excel.

Πίνακας Π.5: Συνάρτηση κατανομής της F κατανομής

v_1=βαθμοί ελευθερίας του αριθμητή
v_2=βαθμοί ελευθερίας του παρονομαστή

<u>Παράδειγμα</u>:



1-α	v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
0,90	1	40	50	54	56	57	58	59	59	60	60	61	61	62	62	63	63	63
0,95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	252	253	254
0,99	1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5930	5981	6022	6056	6107	6157	6209	6260	6313	6340	6366
0,90	2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,46	9,47	9,48	9,49
0,95	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,48	19,49	19,50
0,99	2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,48	99,49	99,50
0,90	3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,17	5,15	5,14	5,13
0,95	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,57	8,55	8,53
0,99	3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,32	26,22	26,13
0,90	4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,82	3,79	3,78	3,76
0,95	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,69	5,66	5,63
0,99	4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,84	13,65	13,56	13,46

Πίνακας Π.5 (συνέχεια)

1-α	v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
0,90	5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,17	3,14	3,12	3,11
0,95	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,43	4,40	4,37
0,99	5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,38	9,20	9,11	9,02
0,90	6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,80	2,76	2,74	2,72
0,95	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,74	3,70	3,67
0,99	6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	7,06	6,97	6,88
0,90	7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,56	2,51	2,49	2,47
0,95	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,30	3,27	3,23
0,99	7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,82	5,74	5,65
0,90	8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,29
0,95	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	3,01	2,97	2,93
0,99	8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	5,03	4,95	4,86
0,90	9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	2,18	2,16
0,95	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,79	2,75	2,71
0,99	9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,48	4,40	4,31
0,90	10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,16	2,11	2,08	2,06
0,95	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,62	2,58	2,54
0,99	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	4,08	4,00	3,91
0,90	12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	1,93	1,90
0,95	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,38	2,34	2,30
0,99	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,54	3,45	3,36