ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.
(ΠΑΡ: ΥΨΟΣ ΚΑΙ ΒΑΡΟΣ ΑΝΘΡΩΠΩΝ, ΤΙΜΗ ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΑΥΤΟ, ...)

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ ΑΝ Η ΣΧΕΣΗ ΑΥΤΗ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ (ΑΝ ΝΑΙ) ΝΑ ΤΗΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ.
ΘΕΛΟΥΜΕ ΛΟΙΠΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΝΑ ΠΕΡΙΓΡΑΨΟΥΜΕ ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΑΥΤΗ. ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΚΑΠΟΙΑ ΓΝΩΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΑΥΤΗΣ:
ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ Η ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΧΡΥΣΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΙΤΟΚΙΑ, ΑΠΟ ΤΗΝ ΖΗΤΗΣΗ ΓΙΑ ΧΡΥΣΑ ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ, ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΕΙΚΤΗ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟΥ, ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ, ...
ΣΥΝΗΘΩΣ ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΠΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΜΙΑ Τ. Μ. Y ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ $X_1, ..., X_m$ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΠΙΛΕΞΟΥΜΕ.

② ΑΝ Υ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ "ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ"

ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ ΤΕΤΟΙΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

$Y = \alpha + \beta X$ ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ

X: ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΗ)

Y: ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

ΤΕΤΟΙΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΙΝΑΙ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ (ΔΗΛΑΔΗ ΟΧΙ ΤΥΧΑΙΑ)

ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΟΜΩΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΙΘΑΝΟ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ - ΣΥΝΗΘΩΣ ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΚΛΕΙΟΥΝ ΤΥΧΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ Ή ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.

ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΣΤΟ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΝΑ ΤΥΧΑΙΟ ΟΡΟ ΠΟΥ ΜΕΤΡΑ ΤΑ ΛΑΘΗ (ΚΑΤΑΛΟΙΠΑ, ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ) ΤΟΥ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΑΙ ΚΑΛΥΠΤΕΙ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ. Ο ΤΥΧΑΙΟΣ ΟΡΟΣ ΑΥΤΟΣ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟΣ.

ΜΟΝΤΕΛΟ:

$Y = \alpha + \beta x + u$ ΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_K X_K + u$ ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΥΤΟ ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ ΜΕ ΤΗΝ ΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

ΠΑΡ: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΝΕΡΟΥ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΗΚΕ ΓΙΑ ΠΟΤΙΣΜΑ ΣΕ ΕΝΑ ΧΩΡΑΦΙ, ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΗ ΣΟΔΕΙΑ (ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΡΙΦΥΛΛΙΟΥ)

ΝΕΡΟ (εκατοστά)	X	12	18	24	30	36	42	48
ΣΟΔΕΙΑ (τόνους/στρέμμα)	Y	5.27	5.68	6.25	7.21	8.02	8.71	8.42

ΑΝ ΕΠΑΝΑΛΑΒΟΥΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΘΑ ΗΤΑΝ ΑΠΙΘΑΝΟ 36 ΕΚΑΤΟΣΤΑ ΝΕΡΟΥ ΝΑ ΕΔΙΝΑΝ ΙΔΙΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΣΟΔΕΙΑΣ. ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΥΤΟ ΙΣΧΥΕΙ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ $Y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$

ΔΗΛΑΔΗ Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΘΕΙΣΑ ΤΙΜΗ 8.02 ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΤΙΜΗ ΠΟΥ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΕΧΕΙ Y ΟΤΑΝ X = 36).

(4)

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

- $E(u_i) = 0$ ΔΗΛΑΔΗ $E(Y_i | x_i) = E(\alpha + \beta x_i + u_i)$

$$= \alpha + \beta x_i + E(u_i) = \alpha + \beta x_i$$

ΚΑΙ Χ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

ΔΗΛΑΔΗ ΠΑΙΡΝΕΙ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΕΣ (= ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ)

- $E(u_i^2) = \sigma^2$ (ΣΤΑΘΕΡΑ) $\leftrightarrow VAR(u_i) = \sigma^2$

$\leftrightarrow$ ΟΜΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ

ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ

$VAR(Y_i) = \sigma^2$

- $COV(u_i, u_j) = E(u_i \cdot u_j) = 0$ ΓΙΑ $i \neq j$

(ΤΑ ΚΑΤΑΛΟΙΠΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ)

* $E(Y_i | x_i) = \alpha + \beta x_i$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΚΑΙ α, β ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $\mu_{Y_i|x_i} = E(Y_i | x_i) = \alpha + \beta x_i$

ΔΗΛΑΔΗ Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ Τ.Μ. Y ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΜΕ Χ.

(5)

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ, ΔΗΛΑΔΗ ΝΑ ΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ

ΑΥΤΟ ΓΙΝΕΤΑΙ ΜΕ ΧΡΗΣΗ Τ.Δ. ΤΙΜΩΝ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ΚΑΙ ΘΑ ΒΡΟΥΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΜΟΡΦΗΣ $\hat{y}_i = a + bx_i$ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ ΑΥΤΗ ΝΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΕΙ ΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ $\mu_{Y_i|x_i} = \alpha + \beta x_i$

(x = "ΜΙΚΡΟ" ΕΠΕΙΔΗ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ΣΤΑΘΕΡΗ
Y = "ΚΕΦΑΛΑΙΟ" ΕΠΕΙΔΗ ΕΙΝΑΙ Τ.Μ.)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ → "ΜΙΚΡΟ" y ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ (= ΤΙΜΗ) ΤΗΣ Τ.Μ. Y.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (OLS)

(ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GAUSS)

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ΑΠΟ Τ.Δ. $(x_1, Y_1), \dots, (x_1, Y_n)$, ΚΑΙ ΕΣΤΩ U_i Η ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ U ΓΙΑ ΤΟ ΖΕΥΓΟΣ (x_i, Y_i) $i = 1, \dots, n$

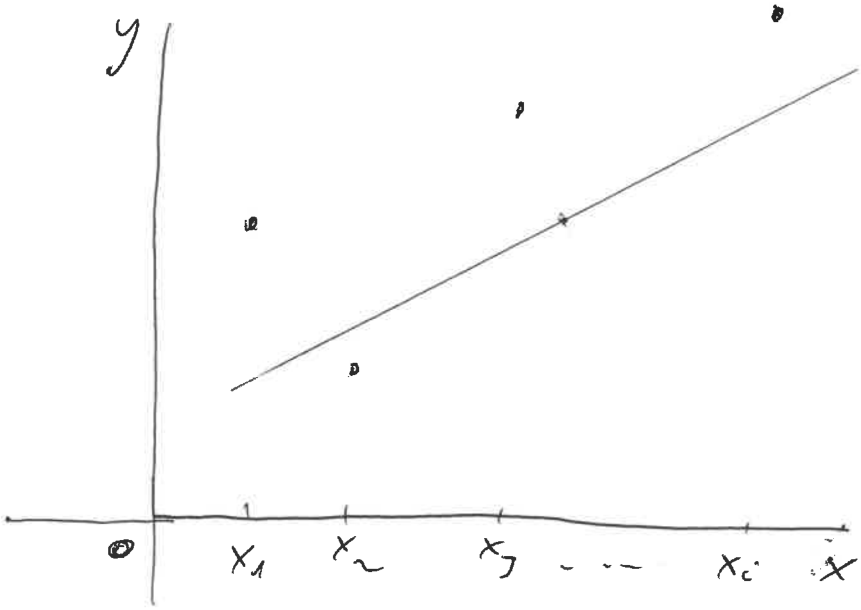
U_i ΔΕΝ ΠΑΡΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΑΦΟΥ α, β ΔΕΝ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΝΤΑΙ.

⑥

ΕΣΤΩ a ΚΑΙ b ΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ α, β (ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ), ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ $\hat{u}_i$ ΤΩΝ u_i ΕΙΝΑΙ

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) \quad , \ i = 1, \dots, n$$

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΑ a ΚΑΙ b ΩΣΤΕ ΝΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΝ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΤΙΚΑ ΣΤΑ α, β.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

ΕΣΤΩ Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

$$\sum_1^n \hat{u}_i^2 = \sum_1^n (y_i - a - bx_i)^2 \longleftrightarrow \text{ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ}$$

ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΑ a, b ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ $\sum_1^n \hat{u}_i^2$ ΝΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ. ΓΙΑ ΑΥΤΟ:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial a} \sum_1^n \hat{u}_i^2 = 0 \qquad \text{ΚΑΙ} \qquad \frac{\partial}{\partial b} \sum_1^n \hat{u}_i^2 = 0 \quad (2)$$

ΚΑΙ ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ Σ.Ε. ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ a, b.

(7)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a} \sum_1^n (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \Leftrightarrow -2 \sum_1^n (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial b} \sum_1^n (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \Leftrightarrow -2 \sum_1^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \sum_1^n y_i = na + b \sum_1^n x_i \\ (2) & \sum_1^n x_i y_i = a \sum_1^n x_i + b \sum_1^n x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΛΥΝΟΥΜΕ ΤΟ Σ.Ε.

$(1) \Leftrightarrow \bar{y} = a + b\bar{x}$ (ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $(\bar{x}, \bar{y})$ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ)

$$\Leftrightarrow a = \bar{y} - b\bar{x}$$

ΚΑΙ $$b = \frac{\sum_1^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$$S_{xx} = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_1^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_1^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_1^n x_i\right)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum_1^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_1^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_1^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_1^n y_i\right)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_1^n (x_i - \bar{x}) y_i$$

ΔΗΛΑΔΗ $$\boxed{b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}}$$

(8)

ΚΑΙ $\boxed{a = \bar{y} - \left(\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right)\bar{x}}$

ΟΠΟΥ a ΚΑΙ b ΕΙΝΑΙ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ Τ.Μ.

$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \left(\frac{S_{xY}}{S_{xx}}\right)\bar{x}$ ΚΑΙ $\hat{\beta} = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$

Η $\hat{y}$ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\hat{Y} = \hat{\mu}_{Y|x}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΝΕΡΟΥ ΚΑΙ ΣΟΔΕΙΑΣ

x = ΝΕΡΟ, y = ΣΟΔΕΙΑ

$S_{xx} = 1008$, $S_{xy} = 103.68$, $\bar{x} = 30$, $\bar{y} = 7.08$

$\Rightarrow$ $b = 0.10$ ΚΑΙ $a = 4$ ΚΑΙ Η ΕΥΘΕΙΑ

ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ (= ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ) ΕΙΝΑΙ $\hat{y} = 4 + (0.1)x$

ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\hat{Y} = \hat{\mu}_{Y|x} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$

(ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ Τ.Δ.)

ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS-MARKOV:

ΣΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΑΠΛΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΙ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ α ΚΑΙ β ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗΝ OLS ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΣΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΕΣ (B.L.U.E)

---

* ΕΡΜΗΝΕΙΑ: ΑΝ ΡΙΞΟΥΜΕ ΕΝΑ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΕΚΑΤΟΣΤΟ ΝΕΡΟΥ ΤΟΤΕ ΠΕΡΙΜΕΝΟΥΜΕ Η ΣΟΔΕΙΑ ΝΑ ΑΥΞΗΘΕΙ ΚΑΤΑ 0.1 ΤΟΝΝΟΥΣ ΑΝΑ ΣΤΡΕΜΜΑ.

* ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟ OLS

- $\sum_{1}^{n} \hat{u}_i = 0$

ΔΙΟΤΙ $\sum_{1}^{n} \hat{u}_i = \sum_{1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)$

ΟΜΩΣ $\hat{y}_i = a + bx_i = \bar{y} - b\bar{x} + bx_i = \bar{y} + b(x_i - \bar{x})$

↳ ΑΦΟΥ $a = \bar{y} - b\bar{x}$

$\Leftrightarrow \hat{y}_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x})$

$\Leftrightarrow \hat{y}_i = \bar{y} + b(x_i - \bar{x})$

$\Leftrightarrow \quad y_i - \hat{y}_i = (y_i - \bar{y}) + b(x_i - \bar{x})$

$$\sum_{1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = \sum_{1}^{n}(y_i - \bar{y}) - b\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

$= 0$ (ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

$\Leftrightarrow \sum_{1}^{n} y_i = \sum_{1}^{n} \hat{y}_i \Leftrightarrow \boxed{\bar{y} = \hat{\bar{y}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{\hat{u}} = 0$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ $\sum_{1}^{n} \hat{u}_i x_i = 0$

ΚΑΙ $\sum_{1}^{n} \hat{u}_i \hat{y}_i = 0$