ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων που αναφέρονται στις μέσες τιμές και αναλογίες πληθυσμών που περιγράφονται, είτε με ακρίβεια, είτε κατά προσέγγιση, από την κανονική κατανομή.

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Α. Περίπτωση Γνωστών Διακυμάνσεων

Καθορισμός του Κρίσιμου Σημείου

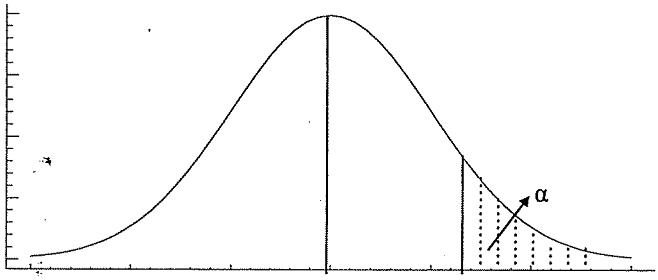
Όπως είπαμε και προηγουμένως, το συνηθέστερο πρόβλημα στον έλεγχο υποθέσεων είναι ο προσδιορισμός της κρίσιμης περιοχής. Για τον σκοπό αυτό, χρειάζεται να καθορίσουμε ή το α ή το β. Στις περισσότερες περιπτώσεις, εκείνο το οποίο καθορίζουμε είναι το α. Τότε μπορούμε να βρούμε το κρίσιμο σημείο (δηλαδή να καθορίσουμε την κρίσιμη περιοχή).

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε ένα κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$, όπου το σ^2 είναι γνωστό. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την στατιστική υπόθεση

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Από όσα είπαμε προηγουμένως, θα έχουμε, αν με c συμβολίσουμε το κρίσιμο σημείο,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\cancel{H_0} \mid H_0) \\ &= P(\overline{X} > c \mid \mu = \mu_0) \\ &= P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0 \right] \\ &= P\left[Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$



Προφανώς,

$$\frac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{1-a}$$

ή ισοδύναμα,

$$c = \mu_0 + Z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Επομένως, θα απορρίπτουμε την H_0 αν,

$$\overline{X} > \mu_0 + Z_{1-a}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Σημείωση: Συνήθως χρησιμοποιούμε, ισοδύναμα, την τυποποιημένη ελεγχοσυνάρτηση και απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α αν,

$$Z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{1-\alpha}$$

Σημείωση: Η τυποποιημένη συνάρτηση ελέγχου, ή αλλιώς Z_0-στατιστική συνάρτηση (Z_0 statistic)

$$Z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

που χρησιμοποιούμε στους ελέγχους της μέσης τιμής κανονικών πληθυσμών με γνωστή διακύμανση είναι το κλασσικό παράδειγμα τυποποιημένης ελεγχοσυνάρτησης. (Ο δείκτης 0 χρησιμοποιείται για να δώσει έμφαση στο γεγονός ότι η τυποποίηση γίνεται σε σχέση με την συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου που μελετάται με την μηδενική υπόθεση). Σε κάθε περίπτωση ελέγχου υποθέσεων για μια παράμετρο ενός πληθυσμού, χρησιμοποιούμε ως τυποποιημένη συνάρτηση ελέγχου την τυποποιημένη τιμή της εκτιμήτριας της παραμέτρου που μελετάμε, κάτω από την μηδενική υπόθεση. (Εδώ, παράμετρος κάτω από την H_0 είναι το μ_0, εκτιμήτριά του είναι το $\overline{X}$ και τυπική απόκλιση της κατανομής του $\overline{X}$ είναι το $\sigma/\sqrt{n}$).

Οι έλεγχοι που χρησιμοποιούν την Z_0-στατιστική συνάρτηση ονομάζονται *Z-έλεγχοι (Z-tests).*

> *Η τιμή της Z_0-στατιστικής συνάρτησης δηλώνει τον αριθμό των τυπικών αποκλίσεων που μια παρατηρηθείσα τιμή της συνάρτησης ελέγχου απέχει από την μέση της τιμή, όπου η μέση αυτή τιμή υπολογίζεται κάτω από την μηδενική υπόθεση.*

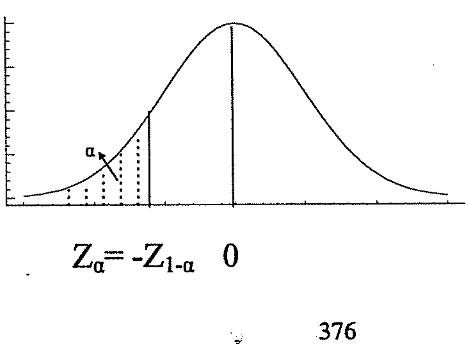
Με την ίδια λογική, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν έχουμε να ελέγξουμε την στατιστική υπόθεση

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

θα απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

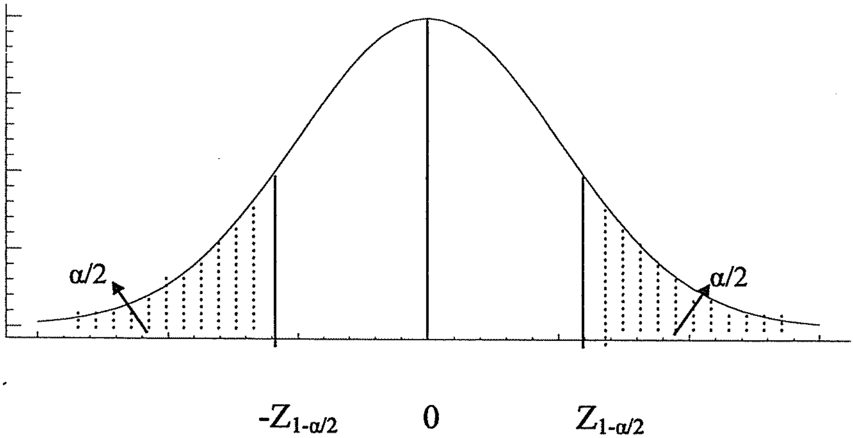
$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_{1-\alpha}$$

[ισοδύναμα, αν $\overline{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$].



Τέλος, αν η εναλλακτική στατιστική υπόθεση είναι αμφίπλευρη, αν δηλαδή

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

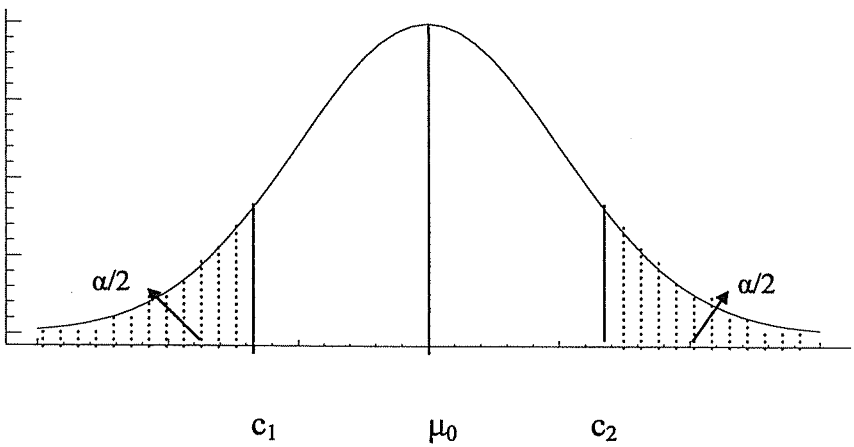


θα απορρίπτουμε την H_0 αν,

$$Z < -Z_{1-\alpha/2} \text{ ή } Z > Z_{1-\alpha/2}$$

[ή ισοδύναμα

$$\overline{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{ή} \qquad \overline{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,]$$



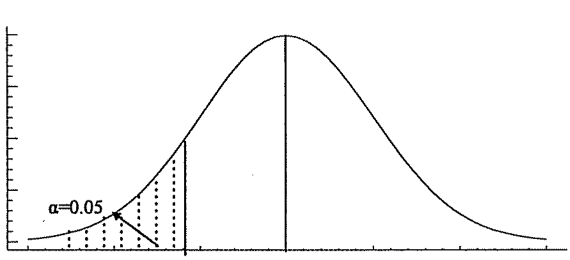
Παράδειγμα: Ένας κατασκευαστής ηλεκτρικών λαμπτήρων ισχυρίζεται ότι η διάρκεια ζωής (σε ώρες) κάποιου συγκεκριμένου τύπου ηλεκτρικών λαμπτήρων που κατασκευάζει έχει μέση τιμή (μέση ζωή) 700 ώρες. Από προηγούμενη εμπειρία, είναι γνωστό ότι ο χρόνος ζωής των ηλεκτρικών λαμπτήρων ακολουθεί την κανονική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι η διασπορά του χρόνου ζωής των λαμπτήρων της κατασκευής αυτής είναι $\sigma^2 = (46.14)^2$. Μια εταιρεία προστασίας καταναλωτών, προκειμένου να ελέγξει τον ισχυρισμό αυτό του κατασκευαστή, επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 10 λαμπτήρων του συγκεκριμένου είδους και τους ελέγχει. Ο έλεγχος δείχνει ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων αυτών είναι $\overline{X} = 689.8$ ώρες.

Με βάση τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου αυτού δείγματος, τί θα μπορούσε να πει κανείς για τον ισχυρισμό του κατασκευαστή σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$;

Λύση: Είναι προφανές ότι ο μέσος χρόνος ζωής των λαμπτήρων, ο οποίος προέκυψε από το δείγμα, είναι μικρότερος από αυτόν που ο κατασκευαστής ισχυρίζεται. Το στατιστικό όμως ερώτημα είναι αν ο μέσος αυτός χρόνος είναι σημαντικά μικρότερος (στην στατιστική ορολογία) από τον ισχυρισμό του κατασκευαστή ή αν η διαφορά που προέκυψε είναι αποτέλεσμα της τυχαίας δειγματοληψίας και δεν είναι αρκετή ώστε να οδηγήσει τον σύνδεσμο καταναλωτών στο να απορρίψει τον ισχυρισμό του κατασκευαστή με στατιστικά ισχυρά κριτήρια.

Η στατιστική υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί είναι,

$$H_0 : \mu = 700$$
$$H_1 : \mu < 700$$



$-Z_{.95}$ 0

Η τυποποιημένη τιμή της ελεγχοσυνάρτησης για το πρόβλημά μας, κάτω από την υπόθεση H_0 είναι,

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{680.8 - 700}{46.14/\sqrt{10}}$$

$$= -0.699$$

Δοθέντος ότι $Z > -Z_{.95}$ το συγκεκριμένο δείγμα δεν δίνει αρκετές ενδείξεις που να οδηγούν στην απόρριψη της H_0.

Παράδειγμα: Μια βιομηχανία παρασκευής και συσκευασίας καφέ χρησιμοποιεί αεροστεγείς συσκευασίες που περιέχουν 368gr καφέ. Όπως είναι φυσικό, δεν είναι δυνατό να επιτυγχάνεται πάντοτε συσκευασία που να περιέχει ακριβώς το περιεχόμενο αυτό.

1. Ο υπεύθυνος της συσκευασίας προκειμένου να ελέγξει το κατά πόσο η επιδίωξη αυτή επιτυγχάνεται, επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 25 πακέτων που έχουν συσκευασθεί με τον τρόπο αυτό. Μετρώντας το περιεχόμενο στις συσκευασίες αυτές διαπιστώνει ότι η μέση ποσότητα καφέ που περιέχεται στις συσκευασίες αυτές είναι 364.1gr. ($\overline{x}$=364.1gr). Με βάση το στοιχείο αυτό σε τί συμπέρασμα μπορεί να καταλήξει ο προϊστάμενος της εταιρείας όσον αφορά την επιδίωξή του;
2. Μια εταιρεία προστασίας καταναλωτών ενδιαφέρεται να ελέγξει κατά πόσον ο ισχυρισμός αυτός της συγκεκριμένης εταιρείας (για περιεχόμενο στις συσκευασίες 368gr καφέ) ισχύει. Με βάση το παραπάνω δείγμα σε τι συμπέρασμα μπορεί να καταλήξει η εταιρεία προστασίας των καταναλωτών;

(Από προηγούμενη εμπειρία, είναι γνωστό ότι η ποσότητα καφέ η οποία περιέχεται στις συσκευασίες αυτές ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 15$ gr).
Ως επίπεδο σημαντικότητας να χρησιμοποιηθεί το $\alpha = 0.05$.

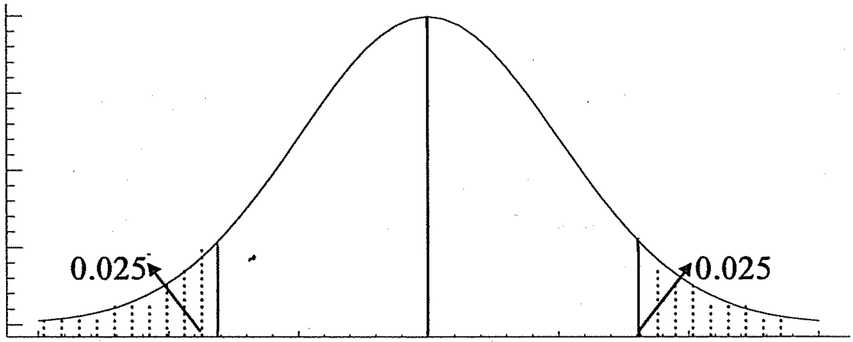
Λύση:

1. Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα ο υπεύθυνος ελέγχου ποιότητας της εταιρείας θα πρέπει να ελέγξει την υπόθεση,

$$H_0 : \mu = 368$$
$$H_1 : \mu \neq 368$$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για το συγκεκριμένο δείγμα είναι,

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{364.1 - 368}{15/\sqrt{25}} = -1.30$$



$Z_{.025} = -Z_{0.975} = -1.96.$ $\qquad Z_{0.975} = 1.96$

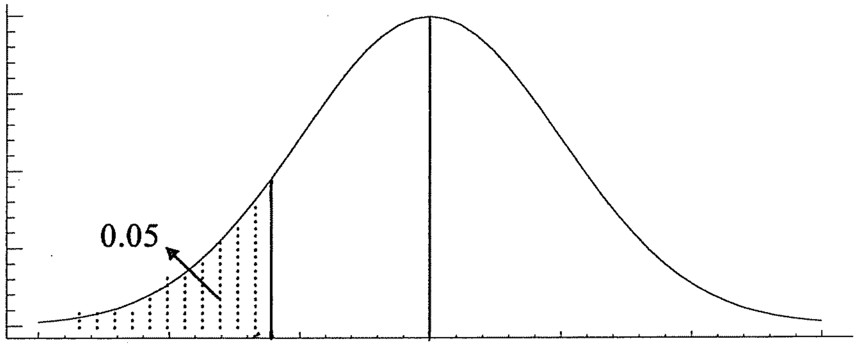
Όπως προκύπτει από τους πίνακες, η κρίσιμη περιοχή για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι αυτή που αναφέρεται σε τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου

$$|Z| > Z_{.975} = 1.96$$

Δοθέντος ότι η κρίσιμη περιοχή για το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου $Z < -Z_{.975}$ και τις τιμές $Z > Z_{.975}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για το συγκεκριμένο δείγμα η παρατηρηθείσα τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου δεν βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή. Επομένως, δεν υπάρχουν ισχυρές στατιστικές ενδείξεις που να οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η μηδενική υπόθεση θα πρέπει να απορριφθεί στο δοθέν επίπεδο σημαντικότητας. Δεν υπάρχουν δηλαδή ενδείξεις ότι η μέση ποσότητα που περιέχεται στις συσκευασίες αυτές διαφέρει στατιστικά σημαντικά από τα 368gr.

2. Όσον αφορά τις επιδιώξεις της εταιρείας προστασίας του καταναλωτή, ο κατάλληλος έλεγχος υπόθεσης είναι:

$$H_0 : \mu = 368$$
$$H_1 : \mu < 368$$



$$Z_{.05} = - Z_{.95} = - 1.645$$

Και στην περίπτωση αυτή, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για το συγκεκριμένο δείγμα είναι $Z > - Z_{.95}$ δηλαδή, η τιμή αυτή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου δεν βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή. Επομένως, και η εταιρεία προστασίας καταναλωτή δεν έχει ισχυρές ενδείξεις που να την οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα συμφέροντα των καταναλωτών που προτιμούν το συγκεκριμένο προϊόν θίγονται (ότι δηλαδή η ποσότητα του καφέ που περιέχεται στην συγκεκριμένη συσκευασία υπολείπεται στατιστικά σημαντικά των 368gr).

Καθορισμός του Επιπέδου Σημαντικότητας

Ελέγχθη ήδη ότι στα προβλήματα ελέγχου υποθέσεων, συνήθως, ο ερευνητής καθορίζει το επίπεδο σημαντικότητας ώστε να ελέγχει το μέγεθος του ενδεχομένου λάθους και με βάση αυτό προσδιορίζει τον κανόνα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις ξεκινάμε από τον καθορισμό του κανόνα απόρριψης και προσδιορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας.

Παράδειγμα: (υπολογισμού του επιπέδου σημαντικότητας α). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη στατιστική υπόθεση,

$$H_0: \mu = 10$$

έναντι της

$$H_1: \mu > 10$$

για έναν πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά 4 [$X \sim N(\mu,4)$]. Ας υποθέσουμε ότι ο κανόνας απόφασης είναι τέτοιος που αν $\overline{X}<12.5$, δεν απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν $\overline{X}\geq 12.5$, απορρίπτουμε την H_0. (Δηλαδή η τιμή 12.5 είναι το κρίσιμο σημείο). Έστω ότι παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους $n = 4$.
Για τον κανόνα απόφασης, όπως ορίσθηκε παραπάνω, έχουμε

$$\alpha = P(\cancel{H_0} | H_0) = P(\overline{X} \geq 12.5 \mid \mu = 10)$$

$$= P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{12.5 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 10 \right]$$

$$= P\left[Z \geq \frac{12.5-10}{2/\sqrt{4}} \right] = P(Z \geq 2.5)$$

$$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Στην περίπτωση αυτή επίσης,

$$\beta = P(H_0 \mid H_1)$$
$$= P(\overline{X} < 12.5 \mid \mu > 10)$$

Η συνάρτηση 1-β για τις διάφορες τιμές του μ τις μεγαλύτερες του 10 θα μας δίνει την ισχύ του συγκεκριμένου ελέγχου.

Σημείωση: Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνήθης πρακτική δεν είναι να υπολογίζεται το α αλλά να καθορίζεται και στην συνέχεια να υπολογίζεται το κρίσιμο σημείο. Ο λόγος που δώσαμε το παράδειγμα αυτό είναι για να αντιληφθούμε την μεθοδολογία που ακολουθείται στα προβλήματα αυτά και η οποία είναι η ίδια για όλα τα προβλήματα.