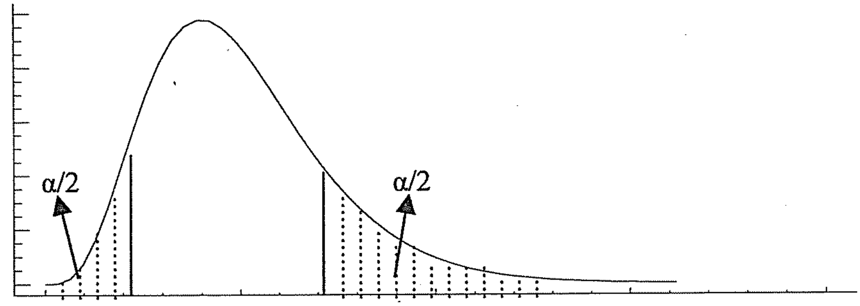
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ

Α. Περίπτωση Ενός Πληθυσμού

Αν μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την διακύμανση σ^2 ενός πληθυσμού, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από έναν $N(\mu,\sigma^2)$ πληθυσμό τότε,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2}=\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim X^2_{n-1}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2 ως εξής:



$X^2_{n-1,\alpha/2}$ $\qquad$ $X^2_{n-1,1-\alpha/2}$

$$P\left(X^2_{n-1,\alpha/2}\le\frac{nS^2}{\sigma^2}\le X^2_{n-1,1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{P\left(\frac{nS^2}{X^2_{n-1,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{nS^2}{X^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha}$$

ή

$$\boxed{P\left(\frac{(n-1)S^{*2}}{X^2_{n-1,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^{*2}}{X^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha}$$

Παράδειγμα: Μια μηχανή που χρησιμοποιείται να γεμίζει κουτιά με μπύρα θα πρέπει να λειτουργεί με τρόπο ώστε η ποσότητα μπύρας που τοποθετείται σε κάθε κουτί να είναι περίπου σταθερή. Αν τοποθετηθεί περισσότερη από την κανονική μπύρα, τότε τα κουτιά ξεχειλίζουν, ενώ αντίθετα, αν τοποθετηθεί ποσότητα πολύ μικρότερη από την κανονική, θα δημιουργηθούν παράπονα από τους καταναλωτές.

Προκειμένου να ελεγχθεί η ποσότητα μπύρας που τοποθετείται στα κουτιά, επιλέγονται τυχαία 20 τέτοια κουτιά στα οποία παρατηρείται μια τυπική απόκλιση 0.2 gr. Να εκτιμηθεί η διακύμανση της ποσότητας που τοποθετείται στα κουτιά με την χρήση ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης.

Λύση: Υποθέτοντας ότι η ποσότητα της μπύρας που τοποθετείται σε κάθε κουτί ακολουθεί την κανονική κατανομή, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2 θα είναι το,

$$\left(\frac{20(.2)^2}{X^2_{19,.975}}, \frac{20(.2)^2}{X^2_{19,.025}}\right)$$

ή

$$\left(\frac{20(.2)^2}{32.85}, \frac{20(.2)^2}{8.907}\right)$$

ή

$$(.02, .09)$$

Το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση σ κατασκευάζεται με την θεώρηση των τετραγωνικών ριζών των άκρων του παραπάνω διαστήματος.

Παρατήρηση: Η επιλογή περιοχών στις ουρές της κατανομής του αυτού εμβαδού για την κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι βέβαια αυθαίρετη. Ο ερευνητής μπορεί να επιλέξει οποιοδήποτε ζεύγος σημείων, έτσι ώστε το συνολικό εμβαδόν στις ουρές της κατανομής να είναι ίσο με α. Επιπλέον το διάστημα εμπιστοσύνης που κατασκευάσθηκε με τη προηγηθείσα μέθοδο δεν είναι κατ' ανάγκη το βραχύτερο. Μπορεί κανείς να κατασκευάσει διάστημα του αυτού βαθμού εμπιστοσύνης, το οποίο να είναι βραχύτερο. Παρόλα αυτά, στην πράξη χρησιμοποιείται η μεθόδος που αναφέραμε των ίσων εμβαδών στις ουρές της κατανομής κυρίως διότι υπάρχουν οι πίνακες αλλά και διότι η ακρίβεια η οποία επιτυγχάνεται δεν διαφέρει πολύ από εκείνην που θα επιτυγχάναμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει την διαδικασία κατασκευής διαστήματος εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους.

Σημείωση: Το στατιστικό πακέτο Statgraphics δίνει τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση ενός πληθυσμού με την ίδια διαδικασία και στην ίδια οθόνη με τα διαστήματα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή.