Γ. Περίπτωση Αγνώστων Ανίσων Διακυμάνσεων

(Ανεξάρτητα Δείγματα)

Αν έχουμε λόγους να πιστεύουμε ότι οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών απέχουν πολύ από το να είναι ίσες, θα πρέπει να γίνουν οι εξής αλλαγές στη διαδικασία που εκθέσαμε μέχρι τώρα:

Η σταθμισμένη εκτιμήτρια S_p^2 δεν είναι πιά κατάλληλη και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι δειγματικές διασπορές S_X^{*2} και S_Y^{*2} των σ_X^2 και σ_Y^2 αντίστοιχα. Επομένως, το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το $\mu_X - \mu_Y$ στη περίπτωση αυτή είναι,

$$\boxed{\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{v,1-\alpha/2}\sqrt{S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m}}$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας *v* της κατανομής *t* δίνονται από τον τύπο

$$\boxed{v \approx \frac{\left(S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m\right)^2}{\dfrac{\left(S_X^{*2}/n\right)^2}{n-1} + \dfrac{\left(S_Y^{*2}/m\right)^2}{m-1}}}$$

Φυσικά, το αποτέλεσμα στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο.

Αν τα μεγέθη των δειγμάτων n και m είναι μεγάλα, χρησιμοποιούμε τις εκτιμήτριες S_X^{*2} και S_Y^{*2} (αντίστοιχα τις S_X^2, S_Y^2) των διασπορών σ_X^2 και σ_Y^2 των δύο πληθυσμών και αξιοποιούμε το γεγονός ότι για μεγάλα δείγματα η στατιστική συνάρτηση

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S_X^{*2}/n+S_Y^{*2}/m}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S_X^2/(n-1)+S_Y^2/(m-1)}$$

ακολουθεί, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, κατά προσέγγιση, την κατανομή N(0,1). Το διάστημα εμπιστοσύνης, επομένως, κατασκευάζεται όπως στην περίπτωση Α. Συγκεκριμένα, το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά μ_X-μ_Y έχει άκρα

$$\overline{X}-\overline{Y}\pm Z_{1-\alpha/2}\sqrt{S_X^{*2}/n+S_Y^{*2}/m}$$

Παράδειγμα: (Συνέχεια του προηγουμένου παραδείγματος).

Αν στο τελευταίο παράδειγμα δεν είμαστε σε θέση να υποθέσουμε ισότητα των διασπορών των δύο πληθυσμών, θα χρησιμοποιούσαμε την τελευταία αυτή μέθοδο για την κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης οπότε ο αριθμός ν των βαθμών ελευθερίας για την κατανομή t που θα χρησιμοποιούσαμε θα ήταν,

$$v=\frac{\left(\frac{29.44}{9}+\frac{20.03}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{29.44}{9}\right)^2}{8}+\frac{\left(\frac{20.03}{9}\right)^2}{8}}$$

Επομένως, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά μ_X-μ_Y είναι,

$$(35.22 - 31.56)\pm(2.120)\sqrt{24.44/9+20.03/9}$$

ή ισοδύναμα,

$$3.66\pm(2.120)\sqrt{4.95}$$

επομένως,

$$3.66\pm 4.71$$

δηλαδή τελικά,

$$(-1.05\ ,\ 8.37)$$

Παρατηρούμε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης που προέκυψε με την μέθοδο αυτή ελάχιστα διαφέρει από εκείνο που είχαμε υπολογίσει προηγουμένως.