ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ: ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Στις προηγούμενες ενότητες ασχοληθήκαμε με μεθόδους που οδηγούν σε εκτιμήτριες των τιμών μιας ή και περισσοτέρων αγνώστων παραμέτρων. Αυτό έγινε με την κατασκευή συναρτήσεων των τιμών ενός τυχαίου δείγματος (των εκτιμητριών) οι οποίες για κάθε δεδομένο δείγμα έδιναν μια μοναδική τιμή ως εκτίμηση.

Είναι βέβαια φανερό ότι η εκτίμηση αυτή (η τιμή της εκτιμήτριας για κάθε συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα) θα διαφέρει εν γένει από την πραγματική τιμή της παραμέτρου και επομένως θα υπάρχει κάποιο περιθώριο αβεβαιότητας που εκφράζεται μέσω της δειγματικής διασποράς της εκτιμήτριας.

Θα μπορούσε έτσι να πει κανείς ότι θα ήταν ίσως προτιμότερο να μιλάμε για ένα φάσμα πιθανών τιμών που αναφέρονται στην υπό εκτίμηση παράμετρο παρά σε μια και μόνη συγκεκριμένη τιμή. Γίνεται με τον τρόπο αυτό προφανής η ανάγκη αναφοράς σε ένα φάσμα πιθανών τιμών μιας υπό εκτίμηση παραμέτρου παρότι, βέβαια, ένα μόνο από τα σημεία μέσα στο φάσμα αυτό θα αντιστοιχεί στην πραγματική τιμή της παραμέτρου, φυσικά με κάποια πιθανότητα.

Η μέθοδος η οποία ασχολείται με τον καθορισμό ενός φάσματος πιθανών τιμών μιας υπό εκτίμηση παραμέτρου ονομάζεται *μέθοδος των διαστημάτων εμπιστοσύνης (confidence intervals).* Η ανάπτυξη της μεθόδου αυτής χρησιμοποιεί μόνο τις αρχές της Θεωρίας Πιθανοτήτων χωρίς να χρειάζεται νέες έννοιες Στατιστικής Συμπερασματολογίας.

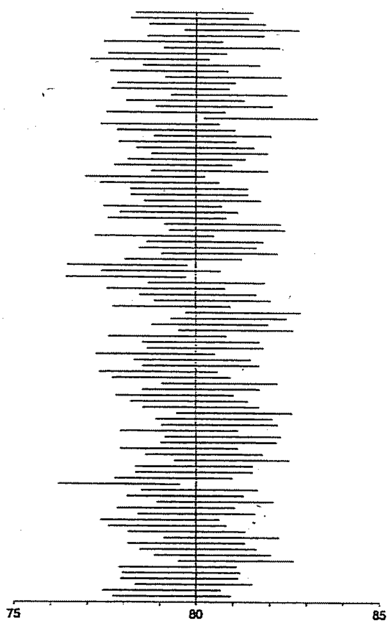
Το διάστημα εμπιστοσύνης χρησιμοποιείται για ασφαλέστερη εκτίμηση μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού με βάση ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό αυτό. Το διάστημα αυτό (που κατασκευάζεται με μεθοδολογία που θα αναπτυχθεί στην συνέχεια) παρέχει ένα φάσμα εύλογων (πιθανών) τιμών της παραμέτρου, συνοδευόμενο από τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι το διάστημα αυτό περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Παρατήρηση: Η κατανόηση της λογικής των διαστημάτων εμπιστοσύνης είναι για κάποιους δύσκολη γιατί δεν περιορίζεται μόνο στο συγκεκριμένο δείγμα που έχει επιλεγεί, αλλά και σε άλλα δείγματα που θα μπορούσε να είχαν επιλεγεί. Η ερμηνεία της λογικής των διαστημάτων εμπιστοσύνης γίνεται καλύτερα κατανοητή με το σχήμα που ακολουθεί.

Σχηματική Παρουσίαση των Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

Το σχήμα που ακολουθεί απεικονίζει την λογική του διαστήματος εμπιστοσύνης για μια παράμετρο με την χρήση 100 διαφορετικών τυχαίων δειγμάτων. Το διάστημα αλλάζει από δείγμα σε δείγμα. Για περίπου 95% των περιπτώσεων, το διάστημα περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου (που στην περίπτωση αυτή είναι 80 και σημειώνεται με την κατακόρυφη γραμμή).

Το ποσοστό των δειγμάτων που κατά προσέγγιση περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου (εδώ το 95%) αντανακλά τον βαθμό εμπιστοσύνης που έχουμε ότι το διάστημα που κατασκευάζεται με την μέθοδο που θα δούμε στην συνέχεια, περιέχει την υπό εκτίμηση παράμετρο.



ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΓΙΑ ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Α. Περίπτωση Γνωστών Διακυμάνσεων

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την μέση τιμή μ ενός κανονικού πληθυσμού. Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ. Επίσης ξέρουμε ότι

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η διασπορά σ^2 του υπό μελέτη πληθυσμού είναι γνωστή και ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών που να περιέχει την πραγματική τιμή του μ με πιθανότητα 0.95. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρεθούν δύο τιμές X_L και X_U τέτοιες ώστε

$$P(X_L \leq \mu \leq X_U) = 0.95$$

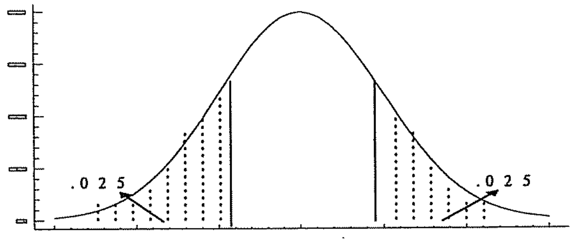
Δοθέντος ότι,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρεθούν δύο σημεία Z_L και Z_U από τους πίνακες της κανονικής κατανομής τέτοια ώστε,

$$P(Z_L \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_U) = 0.95$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα που ακολουθεί



$$-Z_{.975} \qquad Z_{.975}$$

$$Z_L = Z_{.025} = -Z_{.975} \quad \text{και} \quad Z_U = Z_{.975}$$

Επομένως,

$$P\left(-Z_{.975} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{.975}\right) = 0.95$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς μ παίρνουμε,

$$P\left(\overline{X} - Z_{.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Επομένως το 95% διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) για την μέση τιμή μ είναι το,

$$\overline{X} \pm Z_{.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Πιο γενικά και με βάση την λογική που αναπτύξαμε, το 100(1-α)% *διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ ενός κανονικού με γνωστή διασπορά* σ^2 *έχει άκρα,*

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Σημείωση: Λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος, για μεγάλο n, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση αυτή ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει ο υπό μελέτη πληθυσμός.
Αν βέβαια ο πληθυσμός είναι κανονικός, το διάστημα εμπιστοσύνης είναι ένα ακριβές (exact) διάστημα εμπιστοσύνης.

Παρατήρηση: Το διάστημα με άκρα

$$\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

είναι ένα τυχαίο διάστημα. Από τη στιγμή βέβαια που θα παρατηρήσουμε το δείγμα, και επομένως το $\overline{X}$, το διάστημα αυτό είναι καθορισμένο.

Παράδειγμα: Από την εργαστηριακή εξέταση ενός τυχαίου δείγματος 100 τσιγάρων μιας συγκεκριμένης μάρκας, βρέθηκε ότι η μέση ποσότητα νικοτίνης που περιείχαν ήταν $\overline{X} = 26$ mgr (χιλιοστά του γραμμαρίου). Είναι γνωστό ότι για την μάρκα αυτή των τσιγάρων η τυπική απόκλιση είναι σ=8 mgr. Να βρεθεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση ποσότητα νικοτίνης μ που περιέχει αυτή η συγκεκριμένη μάρκα τσιγάρων.

Λύση: Δοθέντος ότι α=.01, έχουμε ότι το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ είναι, κατά προσέγγιση (λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος)

$$\overline{X} \pm Z_{.995} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ή \quad 26 \pm 2.58 \frac{8}{\sqrt{100}}$$

δηλαδή,

$$(23.94\,,\,28.06)$$

Παρατήρηση 1: Η ερμηνεία ότι το διάστημα τιμών (23.94 , 28.06) (όπως και κάθε διάστημα εμπιστοσύνης) περιέχει την πραγματική μέση τιμή νικοτίνης της συγκεκριμένης μάρκας τσιγάρων με πιθανότητα .99 στην πραγματικότητα σημαίνει ότι, αν κατασκευάζαμε διαστήματα εμπιστοσύνης με τη μέθοδο που αναλύσαμε, το ποσοστό των φορών που τα διαστήματα αυτά θα περιείχαν την πραγματική τιμή θα πλησίαζε στο .99 όσο θα αυξανόταν ο αριθμός των φορών που θα επαναλαμβάναμε το πείραμα.

Παρατήρηση 2: Είναι προφανές ότι το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης που κατασκευάσθηκε με τη μέθοδο που αναλύσαμε είναι,

$$2\,Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Παρατήρηση 3: Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν το μήκος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή είναι το α, σ και το n.

Παράδειγμα: Μια εταιρεία συσκευασίας ενός ορισμένου προϊόντος ενδιαφέρεται να κατασκευάσει ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση ποσότητα μ (σε γραμμάρια) που περιέχουν τα πακέτα της συσκευασίας αυτής. Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n=25 δίνει μέσο βάρος $\overline{x} = 362.3$gr. Εξάλλου είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση του βάρους των συσκευασιών αυτών σε ολόκληρο τον πληθυσμό είναι σ=15gr.

Λύση: Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του πληθυσμού θα δίνεται, σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, από τη σχέση

$$362.3 \pm (1.96)(15)/\sqrt{25} \quad ή \quad 362.3 \pm 5.88$$

Δηλαδή τελικά, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι το

$$(356.42\,,\,368.18)$$

Σημείωση: Αν το δείγμα n=25 θεωρηθεί αρκετά μεγάλο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε, ισχύει (κατά προσέγγιση) χωρίς άλλη υπόθεση. Διαφορετικά, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι το περιεχόμενο των συγκεκριμένων συσκευασιών (σε γραμμάρια) ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Β. Περίπτωση Αγνώστων Διακυμάνσεων

Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ ενός κανονικού πληθυσμού χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Δοθέντος ότι το σ^2 είναι άγνωστο, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια εκτιμήτρια του σ^2. Όπως έχουμε ήδη δει, η δειγματική διασπορά

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n}$$

είναι η εκτιμήτρια του σ^2 που προκύπτει με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας και με τη μέθοδο των ροπών. Δοθέντος όμως ότι το S^2 δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 αφού,

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

χρησιμοποιούμε την αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2

$$S^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}$$

Προφανώς,

$$S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$$

Επομένως, αν αντικαταστήσουμε το σ^2 με την αμερόληπτη εκτιμήτριά του στην παράσταση,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

θα έχουμε,

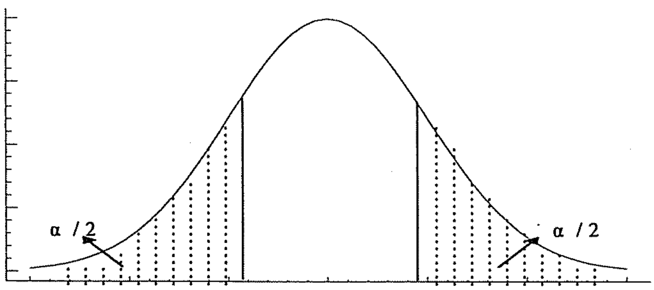
$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{n}{n-1} S^2 \Big/ n}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2 \Big/ (n-1)}} \equiv \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^{*2} \Big/ n}}$$

Σύμφωνα όμως με όσα είδαμε στο πρώτο μέρος για την κατανομή t, ισχύει ότι

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S \Big/ \sqrt{n-1}} \equiv \frac{\overline{X} - \mu}{S^* \Big/ \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Όπως προκύπτει και από τo σχήμα που ακολουθεί, αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από μια κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$,

$$P\left(-t_{n-1,\, 1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{S \Big/ \sqrt{n-1}} \equiv \frac{\overline{X} - \mu}{S^* \Big/ \sqrt{n}} \le t_{n-1,\, 1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$



$-t_{n-1,\, 1-\alpha/2}$ $\quad$ $t_{n-1,\, 1-\alpha/2}$

$=t_{n-1,\, \alpha/2}$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς μ θα έχουμε,

$$P\left(\overline{X}-t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\leq\mu\leq\overline{X}+t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)=1-\alpha$$

Επομένως, το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ ενός κανονικού πληθυσμού με βάση ένα δοθέν τυχαίο δείγμα, είναι

$$\boxed{\overline{X}\pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

ή, χρησιμοποιώντας την αμερόληπτη εκτιμήτρια S^2 του σ

$$\boxed{\overline{X}\pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}}$$

Σημείωση: Όπως προκύπτει από τα προηγηθέντα, στην κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης, όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού εκτιμάται, θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στον τύπο που έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του σ (δηλαδή για την εκτιμήτρια του σ που έχει χρησιμοποιηθεί).

Στην βιβλιογραφία χρησιμοποιείται συνήθως ως εκτιμήτρια του σ^2 η αμερόληπτη εκτιμήτρια $S^{*2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)}{n-1}$. Θα πρέπει επομένως, πριν προχωρήσει κανείς σε συμπερασματολογία και κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης στην περίπτωση αυτή, να εξετάζει με ποιό τρόπο έχει υπολογισθεί η εκτίμηση του σ πριν προχωρήσει στην κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης με έναν από τους δύο προαναφερθέντας τύπους. Ο διαχωρισμός που χρησιμοποιείται εδώ στον συμβολισμό με τη χρήση των συμβόλων S και S^* δεν χρησιμοποιείται συνήθως στη βιβλιογραφία. Η διαφοροποίηση αυτή γίνεται εδώ για διευκόλυνση του αναγνώστη.

Παράδειγμα: Μια εταιρεία που κατασκευάζει πυρίτιδα έχει δημιουργήσει ένα νέο είδος πυρίτιδας της οποίας την ποιότητα θέλει να ελέγξει. Επιλέγοντας τυχαία 8 οβίδες που έχουν κατασκευασθεί με την πυρίτιδα αυτή, η εταιρεία μετρά τις ταχύτητες των βλημάτων αυτών (σε μέτρα/δευτερόλεπτο) και βρίσκει τα εξής αποτελέσματα

3005 2925 2935 2965 2995 3005 2937 2905

Να βρεθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική μέση ταχύτητα μ των οβίδων που κατασκευάζονται με την πυρίτιδα αυτή. (Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες των βλημάτων ακολουθούν, κατά προσέγγιση, την κανονική κατανομή).

Λύση: Από τα στοιχεία του δείγματος έχουμε:

$$\overline{x} = 2959, \quad s = 36.58$$

Από τους πίνακες βρίσκουμε ότι

$$t_{7,.975} = 2.365$$

Επομένως, το παρατηρούμενο διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ είναι

$$2959 \pm 32.7 \quad \text{ή} \quad (2926.3\,,\, 2991.7)$$

Σημείωση: Αν υπολογίζαμε το διάστημα εμπιστοσύνης με βάση την αμερόληπτη εκτιμήτρια S^* του σ, θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας βέβαια τον τύπο

$$\overline{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S^*}{\sqrt{n}}$$

Το S^* είναι 39.09.