1

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ I

(ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS)

ΕΣΤΩ ΟΤΙ X ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ Τ.Μ.

ΛΕΜΕ ΟΤΙ $X \underset{\text{ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ}}{\sim}$ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ ΜΕ N (NORMAL).

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΥΤΗ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (Ή ΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ) ΚΑΙ ΓΡΑΦΟΥΜΕ

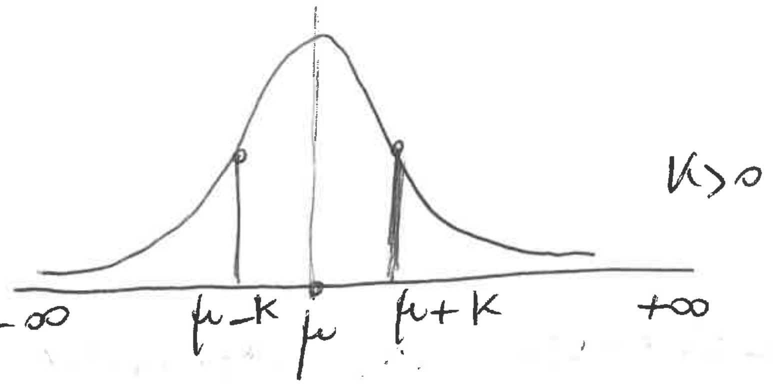
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Ή $X \sim N(\mu, \sigma)$

ΜΕ $\sigma > 0$, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = VAR(X)$.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $f(x)$ ΕΙΝΑΙ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΗΣ $f(x)$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΜΟΡΦΗ



ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

(ΘΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗΣΟΥΜΕ ΛΙΓΟ ΑΡΓΟΤΕΡΑ)

ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΚ ΤΩΝ ΠΙΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ, ΔΙΟΤΙ:

- ΠΟΛΛΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ ΔΥΝΑΝΤΑΙ ΝΑ ΕΚΦΡΑΣΤΟΥΝ ΜΕ Τ.Μ. ΠΟΥ $\sim N$.
- N ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ ΩΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΛΛΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ
- N ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΒΑΣΗ ΓΙΑ ΠΟΛΛΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ. (ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ)

③

ΑΠΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΠΟΨΗΣ $f''(x) < 0$ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ $\mu - \sigma$ ΚΑΙ $\mu + \sigma$ $\Rightarrow$ ΚΑΜΠΥΛΗ $f(x)$ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΛΗ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΑΥΤΟ,

ΚΑΙ $f''(x) > 0$ ΑΛΛΟΥ $\Rightarrow$ ΚΑΜΠΥΛΗ $f(x)$ ΕΙΝΑΙ ΚΥΡΤΗ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ. (ΕΔΩ $k = \sigma$)

ΑΡΑ ΟΣΟ $\sigma \nearrow$ ΤΟΣΟ ΕΥΡΟΣ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΛΗ $\nearrow$ ΔΗΛΑΔΗ ΠΙΟ ΠΛΑΤΥΚΥΡΤΗ

ΚΑΙ ΟΣΟ $\sigma \searrow$ ΤΟΣΟ ΕΥΡΟΣ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΛΗ $\searrow$. ΔΗΛΑΔΗ ΠΙΟ ΛΕΠΤΟΚΥΡΤΗ

ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΠΑΙΖΕΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΡΟΛΟ ΣΤΗΝ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΑΥΤΗΣ.

Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΔΙΟΤΙ $f(x) > 0$ ΚΑΙ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

(4)

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ μ.

Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ $\beta_1 = 0$ $\left(\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}\right)$, ΚΑΙ ΑΠΟ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $\bar{X} = M = T \Rightarrow$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ. (ΔΗΛΑΔΗ $\mu = M = T$)

Η ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΗΣ $N(\mu, \sigma^2)$ ΜΕ $\mu = 0$ ΚΑΙ $\sigma^2 = 1$ ΕΙΝΑΙ ΜΕΣΟΚΥΡΤΗ, ΔΗΛΑΔΗ Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ $\beta_2 = 3$.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ</u>

ΕΣΤΩ X_1 ΚΑΙ X_2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ. ΚΑΙ $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ ΤΟΤΕ $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Ή $N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ ΚΑΙ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑ > 2 ΑΝΕΞ. Τ.Μ.

5

ΠΙΟ ΓΕΝΙΚΑ: ΕΝΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ Τ.Μ. ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΚΑΙ ΑΥΤΟΣ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.

(ΠΑΡ: $X_1 \sim N$ ΚΑΙ $X_2 \sim N$

ΤΟΤΕ $\alpha X_1 + \beta X_2 \sim N$

ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

ΑΝ $\alpha = 2$ ΚΑΙ $\beta = -3$

$2X_1 - 3X_2 \sim N$)

ΠΑΡ. ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ Ε ΕΧΕΙ 2 ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ ΥΠΟΔΗΜΑΤΩΝ E_1 ΚΑΙ E_2 ΓΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ Η ΜΗΝΙΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ $X_1 \sim N(1500, \sigma = 170)$ ΚΑΙ $X_2 \sim N(1800, \sigma = 180)$.

1) ΠΟΙΑ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ (ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ) ΜΗΝΙΑΙΑΣ ΖΗΤΗΣΗΣ (ΔΗΛΑΔΗ ΓΙΑ Ε);

6

ΖΗΤΑΜΕ $X = X_1 + X_2$

ΑΦΟΥ $X_1 \sim N$ ΚΑΙ $X_2 \sim N \Rightarrow X \sim N$

ΜΕΣΟΣ (= ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ) X

$= \mu = 1500 + 1800 = 3300$

ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (VAR) X

$= \sigma^2 = (170)^2 + (180)^2 = 61300$

ΤΥΠ. ΑΠΟΚΛΙΣΗ $\sigma \simeq 248 = \sqrt{(170)^2 + (180)^2}$

(ΔΙΟΤΙ ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΜΗΝΙΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟ Ε1 ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΑΠΟ ΜΗΝΙΑΙΑ ΖΗΤΗΣΗ ΣΤΟ Ε2) $\rightarrow X \sim N(3300, \sigma = 248)$
$\sigma^2 = 61300$

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΤΥΠ. ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΣ ΔΙΟΤΙ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ:

- ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΠΕΡΙΠΟΥ ΤΑ 68% ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
- ΣΤΟ $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΠΕΡΙΠΟΥ ΤΑ 95% ΤΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ
- ΣΤΟ $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΧΕΔΟΝ ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (99.7%)

7

γ) ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ:
ΠΟΣΑ ΖΕΥΓΗ ΠΑΠΟΥΤΣΙΩΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΑΡΑΓ-
ΓΕΙΛΕΙ Ε ΓΙΑ ΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΕΙ ΠΕΡΙΠΟΥ
ΤΑ 95% ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΤΟΥ E_1;

ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ
ΠΑΡΑΓΓΕΙΛΕΙ $\mu_1 + 2\sigma_1 = 1500 + 2\times(170)$
$= 1840$ ΖΕΥΓΗ

ΑΝ ΘΕΛΕΙ ΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΕΙ ΣΧΕΔΟΝ
ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΠΕΛΑΤΕΣ ΤΟΥ E_1 ΘΑ
ΠΑΡΑΓΓΕΙΛΕΙ $\mu_1 + 3\sigma_1 = 1500 + 3\times(170)$
$= 2010$ ΖΕΥΓΗ.

ΑΝ ΘΕΛΕΙ ΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΕΙ ΤΑ 95%
ΤΩΝ ΠΕΛΑΤΩΝ ΤΟΥ Ε ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ
ΠΑΡΑΓΓΕΙΛΕΙ $\mu + 2\sigma = 3300 + 2\times(248)$
$= 3796$ ΖΕΥΓΗ

8

ΤΥΠΙΚΗ Ή ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΕΣΤΩ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ΚΑΙ ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ). Η ΝΕΑ Τ.Μ. $Z \sim N$

ΚΑΙ $E(Z) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \underbrace{E(\mu)}_{\mu}]$

$= 0$

ΚΑΙ $VAR(Z) = \frac{1}{\sigma^2} VAR(X-\mu)$

$= \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) VAR(X) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2) = 1$

ΔΗΛΑΔΗ $Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

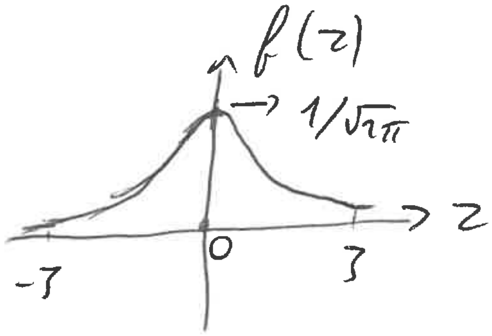
- ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

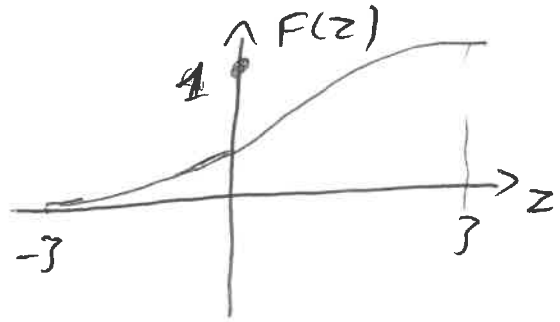
- ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)\,du = P(Z \le z)$$

(9)



$f(-3)=f(3)\simeq 0$

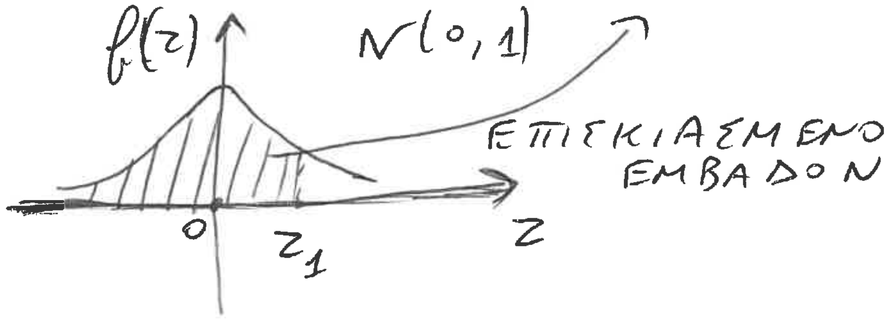


$\simeq$ 99.7% ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΟ $(-3,3)$

ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ
$F(-3)\simeq 0$, $F(3)\simeq 1$

(ΔΙΟΤΙ $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$
ΜΕ $\mu=0$, $\sigma=1$)

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ $F(z)$
ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ ΣΗΜΕΙΟ $z=z_1$
ΑΠΟ ΣΧΕΣΗ $F(z_1)=P(Z\le z_1)=\int_{-\infty}^{z_1} f(u)\,du$



Η $F(z_1)$ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΗΣ
$N(0,1)$ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.

ΠΑΡ. ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $F(1.4)=P(Z\le 1.4)$

(→ ΓΡΑΜΜΗ 1.4 ΚΑΙ ΣΤΗΛΗ 0.00)

ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ $F(1.4)=0.9192$

10

ΠΑΡ. ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $F(1.42)$

ΜΕ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ

$F(1.42) = P(Z \leq 1.42) = 0.9222$

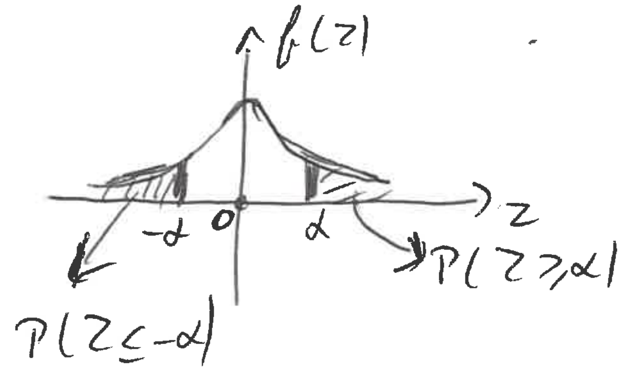
(ΓΡΑΜΜΗ 1.4 ΚΑΙ ΣΤΗΛΗ 0.02)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

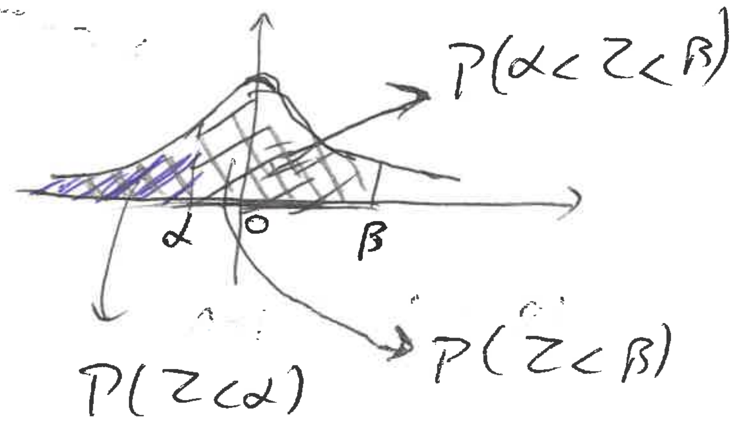
- ΓΙΑ $\alpha \geq 0$ $\quad P(Z \geq \alpha) = P(Z \leq -\alpha)$

- $P(\alpha < Z < \beta) = P(Z < \beta) - P(Z < \alpha)$

Η 1η ΙΔΙΟΤΗΤΑ:



Η 2η ΙΔΙΟΤΗΤΑ



ΠΑΡ.

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $P(|Z| < 1.4)$

ΑΠ. $= P(-1.4 < Z < 1.4)$

$= \underbrace{P(Z < 1.4)}_{F(1.4)} - \underbrace{P(Z < -1.4)}_{F(-1.4)}$

↳ ΑΠΟ ΠΙΝΑΚΕΣ $N(0,1)$

ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ $P(Z < -1.4)$

11.

$P(Z<-1.4) = P(Z>1.4) = 1 - P(Z \leq 1.4)$

(ΔΙΟΤΙ $P(Z>1.4) + P(Z \leq 1.4) = 1$)

$\Rightarrow F(-1.4) = 1 - \underbrace{F(1.4)}$

↳ ΑΠΟ ΠΙΝΑΚΕΣ $N(0,1)$

ΔΗΛΑΔΗ

$P(|Z|<1.4) = P(Z \leq 1.4) - (1 - P(Z \leq 1.4))$

$= 2 \cdot P(Z \leq 1.4) - 1$

$= 2 \cdot (0.9192) - 1 = 0.8384$

ΓΕΝΙΚΑ ΟΜΩΣ Η Τ.Μ. ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΗΝ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ. ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΖΟΥΜΕ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ.

ΠΑΡ. ΕΣΤΩ $X \sim N(5, \sigma=2)$ ΚΑΙ ΖΗΤΑΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ $P(2<X<7)$

→ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ $Z = \frac{X-5}{2}$

ΓΙΑ $X=2 \rightarrow Z = -3/2$

ΓΙΑ $X=7 \rightarrow Z = 1$

$\Rightarrow P(2<X<7) = P(-\frac{3}{2} < Z < 1)$

(12)

ΚΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ, ΔΗΛΑΔΗ:

$$P\left(-\frac{3}{2} < Z < 1\right) = P(Z<1) - P\left(Z<-\frac{3}{2}\right)$$

$$= P(Z\leq 1) - \left(1 - P\left(Z\leq \frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= P(Z\leq 1) + P\left(Z\leq \frac{3}{2}\right) - 1$$

$$= F(1) + F\left(\frac{3}{2}\right) - 1$$

$$= 0.8413 + 0.9332 - 1$$

$$= 0.7745$$