Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 1 - Θεωρία Πιθανοτήτων (Ορισμός Πιθανότητας, Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικών Πιθανοτήτων, Κανόνας Bayes)

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

7/12/2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Ορισμός Πιθανότητας

Έστω A ένα ενδεχόμενο. Η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A ορίζεται ως:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \tag{1}$$

όπου $N(A)$ ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου A και $N(\Omega)$ ο αριθμός των ευνοϊκών και μη ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου A.

Άσκηση 1

1. Να υπολογιστεί η πιθανότητα, από μια τράπουλα 52 φύλλων, σε μια μόνο προσπάθεια, να τραβήξω έναν άσσο.

2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε μια ρίψη ενός ζαριού, να φέρω αποτέλεσμα 5 ή 6.

3. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δυο κανονικά ζάρια. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

   $A =$ εμφανίζεται ακριβώς ένα 6αρι

   $B =$ το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστον 5 και το άλλο ζάρι φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.

Συνέχεια Άσκησης 1

1. Με τον ορισμό της πιθανότητας [τύπος (1)], μπορώ να υπολογίσω:
   $P(ACE) = \frac{N(ACE)}{N(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
2. $P(5 \cup 6) = \frac{N(5 \cup 6)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Συνέχεια Άσκησης 1

3. Θα ξεκινήσω με την κατασκευή του δειγματοχώρου Ω και στη συνέχεια θα φτιάξω το σύνολο εκείνο που θα περιέχει όλες τις ευνοϊκές περιπτώσεις πραγματοποίησης του ενδεχομένου A και του ενδεχομένου B.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Συνέχεια Άσκησης 1

Αντίστοιχα,

A = {(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)}

B =
{(5,2),(5,4),(5,6),(6,2),(6,4),(6,6),(2,5),(4,5),(6,5),(2,6),(4,6)}

Τέλος, με τον τύπο (1), μπορώ να υπολογίσω:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{36}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Έστω A ένα ενδεχόμενο και B ένα μη κενό ενδεχομένο. Η δεσμευμένη πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, δεδομένης της πραγματοποίησης του B ορίζεται ως:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2}$$

Άσκηση 2

Άσκηση 1.3.4, σελ. 91 - Βιβλίο Δάρα-Σύψα

Σε μια ταυτόχρονη ρίψη 2 ζαριών, να υπολογιστεί η πιθανότητα το αποτέλεσμα του δεύτερου ζαριού να είναι 4, όταν γνωρίζω ότι το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυο ζαριών είναι 7.

Θα ορίσω τα δυο ενδεχόμενα:
$A = \{$Το αποτέλεσμα του δεύτερου ζαριού είναι 4$\}$ και
$B = \{$το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυο ζαριών είναι 7$\}$

Συνέχεια Άσκησης 2

Θέλω να υπολογίσω την πιθανότητα:

$P(A|B) = P(\{$Το αποτέλεσμα του δεύτερου ζαριού είναι $4\}/\{$το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυο ζαριών είναι $7\})$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας

Για δυο ενδεχόμενα, A και B μη κενό ενδεχομένο. Ισχύει:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \tag{3}$$

Γενικά, σε n ενδεχόμενα. Ισχύει:

$$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)... \tag{4}$$

Άσκηση 3

Άσκηση 1.3.10, σελ. 95 - Βιβλίο Δάρα-Σύψα

Ανάμεσα από 10 φοιτητές (4 Δευτεροετείς και 6 από τα υπόλοιπα έτη), επιλέγχουμε τυχαία 3 φοιτητές, χωρίς επανάθεση.

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

1. Οι τρεις επιλεγμένοι φοιτητές είναι δευτεροετείς.
2. Οι τρεις επιλεγμένοι φοιτητές είναι από άλλα έτη.

Συνέχεια Άσκησης 3

1. P(και οι 3 δευτεροετείς) $=$
   P(ο πρώτος δευτεροετής $\cap$ ο δεύτερος δευτεροετής $\cap$ ο τρίτος δευτεροετής) $=$
   P(ο πρώτος δευτεροετής)P(ο δεύτερος δευτεροετής/ο πρώτος δευτεροετής)P(ο τρίτος δευτεροετής/ο πρώτος και ο δεύτερος δευτεροετής) $=$
   $= \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

2. P(και οι 3 από άλλα έτη)

Αφήνεται για εξάσκηση.

Θεώρημα Ολικών Πιθανοτήτων

Έστω B ένα ενδεχόμενο και A_i οι i διαμερίσεις του. Τότε ισχύει,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \tag{5}$$

Άσκηση 4

Άσκηση 1.3.16, σελ. 99 - Βιβλίο Δάρα-Σύψα

Γνωρίζουμε ότι το 60% των κινητών τηλεφώνων διαθέτει κάμερα. Το 70% των κινητών που διαθέτει κάμερα, διαθέτει και ραδιόφωνο, ενώ το 40% των κινητών που δεν διαθέτει κάμερα, διαθέτει ραδιόφωνο.

Να βρεθεί οι πιθανότητα ένα κινητό τηλέφωνο να διαθέτει ραδιόφωνο.

Συνέχεια Άσκησης 4

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5), έχουμε διαδοχικά:

$P(\text{Ραδιόφωνο}) = P(\text{Ραδιόφωνο}|\text{Κάμερα})P(\text{Κάμερα}) + P(\text{Ραδιόφωνο}|\text{Όχι Κάμερα})P(\text{Όχι Κάμερα}) =$

$0{,}7*0{,}6 + 0{,}4*0{,}4 = 0{,}42+0{,}16 = 0{,}58$

Άσκηση 5

Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 150 λαμπτήρες. 40 από τον προμηθευτή Α, 50 από τον προμηθευτή Β και οι υπόλοιπες από τον προμηθευτή Γ.

Γνωρίζουμε ότι το 15% του Α είναι ελαττωματικά, το 20% του Β είναι ελαττωματικά και το 10% του Γ είναι ελαττωματικά.

Επιλέγουμε στην τύχη έναν λαμπτήρα από το κιβώτιο.

Να βρεθεί οι πιθανότητα να είναι ελαττωματικός.

Συνέχεια Άσκησης 5

Έστω Ε το ενδεχόμενο «ο λαμπτήρας είναι ελαττωματικός». Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5), έχουμε διαδοχικά:

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{E}|\mathrm{A})P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{E}|\mathrm{B})P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{E}|\Gamma)P(\Gamma) =$$

$$0{,}15 * \frac{40}{150} + 0{,}2 * \frac{50}{150} + 0{,}1 * \frac{60}{150} = \frac{22}{150}$$

Κανόνας Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \tag{6}$$

Άσκηση 6

Άσκηση 1.3.23, σελ. 103 - Βιβλίο Δάρα-Σύψα

Ένα δοχείο (Δ_1) περιέχει 3 μαύρες (Μ) και 4 άσπρες (Α) μπάλες. Ένα άλλο δοχείο (Δ_2) περιέχει 4 μαύρες (Μ) και 5 άσπρες (Α) μπάλες. Επιλέγω μια μπάλα από κάποιο δοχείο, με τον εξής κανόνα: Ρίχνω ταυτόχρονα 2 ζάρια και εάν το άθροισμα των ενδείξεων των δυο ζαριών είναι 2,3,4,5,6,7,8 επιλέγω από το δοχείο (Δ_1), ενώ σε άλλη περίπτωση επιλέγω από το δοχείο (Δ_2).

1. Αν επιλέξω μια μπάλα από το αντίστοιχο δοχείο, ποια η πιθανότητα να είναι μαύρη;
2. Ποια η πιθανότητα να έχω διαλέξει από το δοχείο (Δ_2), δεδομένου ότι η μπάλα που έχω διαλέξει είναι μαύρη;

Συνέχεια Άσκησης 6

1. Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο (5) για να βρω την πιθανότητα η μπάλα που θα επιλέξω να είναι μαύρη.
$P(M) = P(M|\Delta_1)P(\Delta_1) + P(M|\Delta_2)P(\Delta_2) =$
$\frac{3}{7}\frac{26}{36} + \frac{4}{9}\frac{10}{36} = 0,43$
2. Θα χρησιμοποιήσω τον τύπο (6) για να υπολογίσω τη ζητούμενη πιθανότητα.

$$P(\Delta_2|M) = \frac{P(M \cap \Delta_2)}{P(M)} = \frac{P(M|\Delta_2)P(\Delta_2)}{P(M)} = \frac{\frac{4}{9}\frac{10}{36}}{0{,}43} = 0,287$$