①

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ: ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ

ΕΣΤΩ $f(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $[a,b]$ ΚΑΙ ΕΣΤΩ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)$, ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ $F'(x)=f(x)$, ΤΟΤΕ ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

(a, b ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΟΡΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ)

ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- ΓΙΑ $\forall$ c ΣΤΑΘΕΡΑ
  $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
- ΕΣΤΩ $g(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΟ $[a,b]$,
  $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

②

- ΓΙΑ $a < c < b$ ΙΣΧΥΕΙ:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $\int_a^b f(x)\,dx$

- ΕΣΤΩ $f(x) = K$ (ΣΤΑΘΕΡΑ)

ΤΟΤΕ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b K\,dx = K\int_a^b dx$

$= K[x]_a^b = K[x]_a^b = K(b-a)$

ΑΝ ΓΙΑ ΠΑΡ $K=2$, $a=3$, $b=5$

$$\int_3^5 2\,dx = 2\int_3^5 dx = 2[x]_3^5 = 2(5-3) = 4$$

- ΕΣΤΩ $f(x) = x^{\alpha}$ ΚΑΙ $\alpha \neq -1$

ΤΟΤΕ $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b$

$= \left[\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] - \left[\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]$

ΠΑΡ. $\alpha = 3$, $a = 3$, $b = 5$

$$\int_3^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_3^5 = \frac{625}{4} - \frac{81}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

(3)

ΔΗΛΑΔΗ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 8$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 2x + 8)\,dx$$

$$= \int_1^2 4x^3\,dx + \int_1^2 3x^2\,dx - \int_1^2 2\,dx + \int_1^2 8\,dx$$

$$= 4\int_1^2 x^3\,dx + 3\int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + 8\int_1^2 dx$$

$$= \cancel{4}\left[\frac{x^4}{\cancel{4}}\right]_1^2 + \cancel{3}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_1^2 - \cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^2 + 8[x]_1^2$$

$$= [x^4]_1^2 + [x^3]_1^2 - [x^2]_1^2 + 8[x]_1^2$$

$$= (16-1) + (8-1) - (4-1) + 8(2-1)$$

$$= 15 + 7 - 3 + 8 = 27$$

- $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_1^2 = \ln|2| - \ln|1|$$

$$= \ln(2)$$

(ΑΦΟΥ $\ln(1) = 0$)

ΠΟΙΟ ΘΑ ΗΤΑΝ

$\int_2^1 \frac{dx}{x}$; ΜΕ ΒΑΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$\int_2^1 \frac{dx}{x} = -\int_1^2 \frac{dx}{x} = -\ln(2)$$

- $$\int_a^b e^x\,dx = [e^x]_a^b = e^b - e^a$$

4

ΠΑΡ. $a = 1$, $b = 2$

$$\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$$

ΠΟΙΟ ΘΑ ΗΤΑΝ $\int_1^2 3e^x dx$;

ΑΠΟ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$$\int_1^2 3e^x dx = 3\int_1^2 e^x dx = 3(e^2 - e)$$

- ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ)

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΖΗΤΑΜΕ $\int_1^2 e^{(3x+2)} dx$

ΘΕΤΟΥΜΕ $u = 3x+2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

ΔΗΛΑΔΗ $dx = \frac{du}{3}$

ΚΑΙ ΤΑ ΟΡΙΑ $x_1 = 1$ ΚΑΙ $x_2 = 2$ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΜΕΤΑΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΣΕ

$u_1 = 3x_1 + 2 = 5$, $u_2 = 3x_2 + 2 = 8$

$$\rightarrow \int_1^2 e^{(3x+2)} dx = \int_5^8 e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_5^8 e^u du$$

$$= \frac{1}{3}(e^8 - e^5)$$

5

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

ΕΣΤΩ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $u = u(x)$
ΚΑΙ $v = v(x)$

ΚΑΙ u' ΚΑΙ v' ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΤΟ $[a, b]$

ΤΟΤΕ $\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$

(ΔΗΛΑΔΗ $\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int v \cdot du$)

ΠΑΡ: ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $\int_0^1 x e^x \, dx$

ΘΕΤΟΥΜΕ $u = x$, $v' = e^x$ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΧΕΣΗ. ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ v ΚΑΙ u' $\rightarrow$ ΑΠΟ $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$, ΚΑΙ $u' = 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 (1) \cdot e^x \, dx$$

$$= (1) \cdot e^1 - 0(e^0) - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1$$

$$= 1$$

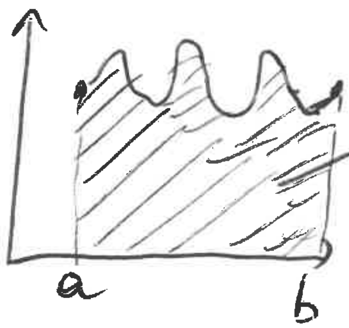
(6)

ΕΜΒΑΔΑ

ΑΝ $f(x) \geq 0$ ΓΙΑ $\forall x \in [a,b]$ ΤΟΤΕ

$\int_a^b f(x)\,dx$ ΔΙΝΕΙ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ

ΤΟΥ ΧΩΡΙΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $f(x)$, ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ Χ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ $x=a$ ΚΑΙ $x=b$

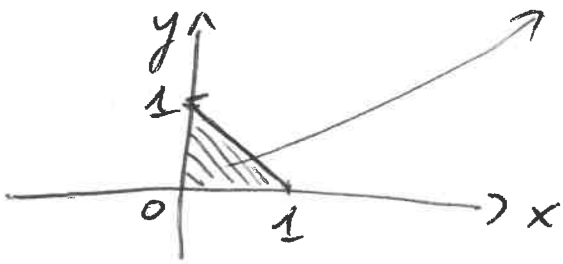


(ΒΛ. ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ, ΣΕΛ. 330)

ΠΑΡ.

ΕΣΤΩ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = 1-x = f(x)$

ΚΑΙ ΖΗΤΑΜΕ ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $f(x)$ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΥΘΕΙΕΣ $x=0$ ΚΑΙ $x=1$



ΓΙ' ΑΥΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ (x ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΙΜΕΣ ΑΠΟ 0 ΕΩΣ 1)

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx$$

$$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)$$

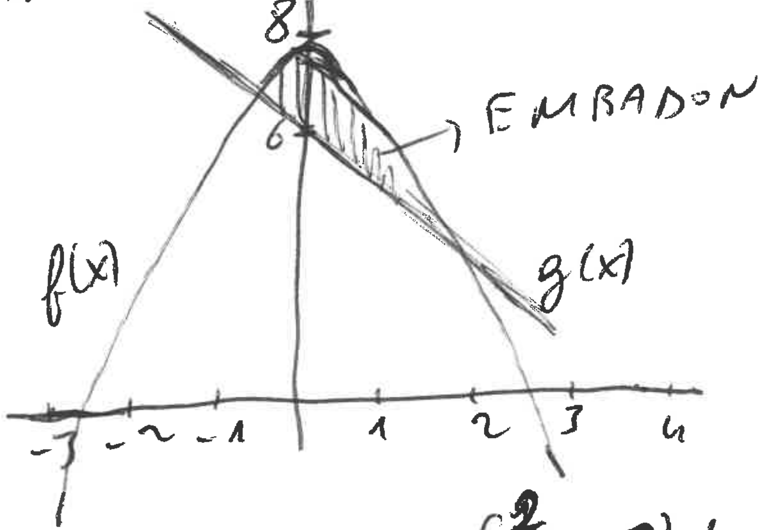
$$= \frac{1}{2}$$

ΓΝΩΣΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

7

ΑΛΛΟ ΠΑΡ. ΓΙΑ ΕΜΒΑΔΑ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΜΠΥΛΩΝ:

ΕΣΤΩ ΤΟ ΧΩΡΙΟ ΠΟΥ ΠΕΡΙΚΛΕΙΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ $f(x)$ ΚΑΙ $g(x)$ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ $x=-1$ ΚΑΙ $x=2$



$f(x) = 8 - x^2$

$g(x) = -x + 6$

ΕΜΒΑΔΟΝ $E = \int_{-1}^{2} (8 - x^2)\,dx - \int_{-1}^{2} (-x+6)\,dx$

$$= \int_{-1}^{2} 8\,dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx - \left(\int_{-1}^{2} -x\,dx + \int_{-1}^{2} 6\,dx\right)$$

$$= 2\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx + \int_{-1}^{2} x\,dx$$

$$= 2\left[x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2\left(2-(-1)\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$= 2(3) - 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$