①

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ
(ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΤΙΜΗ, ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ)

ΕΣΤΩ X ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ., ΚΑΙ ΕΣΤΩ $X(\Omega)$ ΤΟ Π.Τ. ΤΗΣ X, ΔΗΛΑΔΗ

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ:
(ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ)

$f(x_i) = P(X = x_i)$ ΚΑΙ $i = 1, \ldots, m$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ $E(X)$, ΚΑΙ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot f(x_i)$$ → ΕΙΝΑΙ Ο "ΜΕΣΟΣ" ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ Τ.Μ. X. ΔΗΛΑΔΗ $\mu(X)$

(ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΔΗΛΑΔΗ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΡΟΠΟ ΜΕ ΑΥΤΟΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΣΑΜΕ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΠΟΥ, ΑΝΤΙ ΓΙΑ $f(x_i)$, ΕΙΧΑΜΕ ΤΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ)

②

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ $E(X)$

1) ΕΣΤΩ $Y = \alpha + \beta X$ ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ

ΤΟΤΕ $E(Y) = \alpha + \beta \cdot E(X)$

(ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΜΕ ΙΔΙΟΤΗΤΑ $\bar{x}$)

ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΩΣ ΕΞΗΣ:

$$E(\cancel{Y}) = E(\alpha + \beta X) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta x_i f(x_i)$$

$$= \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}_{1} + \beta \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)}_{E(X)}$$

2) ΕΣΤΩ X ΚΑΙ Y Τ.Μ. ΜΕ ΤΙΜΕΣ $x_1, \dots, x_n$ ΚΑΙ $y_1, \dots, y_m$

ΤΟΤΕ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

ΔΙΟΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ ΟΤΙ

$$E(X+Y) \underset{\text{ΕΞ ΟΡΙΣΜΟΥ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) f(x_i, y_j)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΖΕΥΓΟΥΣ Τ.Μ.

$$= \dots = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}_{E(X)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} y_j f(y_j)}_{E(Y)}$$

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ, ΑΝ α ΚΑΙ β ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΕΣ, ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ

$$E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$$

3) $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ ΑΝ X ΚΑΙ Y ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

$$\left(\sum_i \sum_j x_i\cdot y_j\cdot f(x_i,y_j)=\left(\sum x_i f(x_i)\right)\cdot\left(\sum y_j f(y_j)\right)\right)$$

$i=1,\ldots,n$
$j=1,\ldots,m$

ΠΑΡ. ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ $E(x)$

ΕΣΤΩ

X:	1	2	3	4
$f(x)$:	0.3	0.1	0.2	0.4

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $E(X)$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $f(x)$ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΑΦΟΥ $f(x_1)>0$, $f(x_2)>0$, $f(x_3)>0$, $f(x_4)>0$, ΜΕ $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$

ΚΑΙ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1$

(4)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E(X)$:

$$E(X) = 1\times(0.3) + 2\times(0.1) + 3\times(0.2) + 4\times(0.4) = 2.7$$

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ VAR

ΕΣΤΩ X ΔΙΑΚΡΙΤΗ, Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ X ΕΙΝΑΙ VAR(X) ΚΑΙ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$VAR(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = \sigma^2(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot f(x_i)$$

ΔΗΛΑΔΗ $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mu(X)\right)^2 f(x_i)$

Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΕΠΙΣΗΣ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΥΠΟ

$$VAR(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

ΔΗΛΑΔΗ $VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot f(x_i)\right)^2$

(ΔΙΟΤΙ: $E\left(X - E(X)\right)^2 = E\left(X^2 - 2X\cdot E(X) + (E(X))^2\right)$

$$= E(X^2) - 2E[X\cdot E(X)] + E[(E(X))^2]$$

$$= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 \quad)$$

5

ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ΟΠΟΥ

$E(X) = 2.7$. ΕΧΟΥΜΕ:

$(x_1 - E(X))^2 = (1-2.7)^2$

$(x_2 - E(X))^2 = (2-2.7)^2$

$(x_3 - E(X))^2 = (3-2.7)^2$

$(x_4 - E(X))^2 = (4-2.7)^2$

$\rightarrow VAR(X) = \sigma^2(X) = (1-2.7)^2 \times (0.3) + (2-2.7)^2 \times (0.1) + (3-2.7)^2 \times (0.2) + (4-2.7)^2 \times (0.4)$

$= 1.61$

ΣΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΑΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ VAR(X). ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΕΥΚΟΛΙΑ ΣΥΝΗΘΩΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ

$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

ΜΕ $E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 f(x_i)$

$= (1)^2 \times (0.3) + (2)^2 \times (0.1) + (3)^2 \times (0.2) + (4)^2 \times (0.4)$

ΚΛΠ...

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ $\sigma(X) = \sqrt{VAR(X)} = 1.269$

⑥

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ VAR(X)

1) ΕΣΤΩ $Y = \alpha + \beta X$ (α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

$$VAR(Y) = \beta^2 VAR(X)$$

(ΟΠΩΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

2) $VAR(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 VAR(X) + \beta^2 VAR(Y)$

ΑΝ X ΚΑΙ Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

(ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΓΙΑ 1.:

$$VAR(Y) = E[(\alpha+\beta X) - E(\alpha+\beta X)]^2$$ ΕΞ ΟΡΙΣΜΟΥ

$$= E[\underbrace{\alpha - E(\alpha)}_{0} + \beta X - E(\beta X)]^2$$

$$= E[\beta X - \beta E(X)]^2$$

$$= \beta^2 E(X - E(X))^2$$)

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

ΓΙΑ ΖΕΥΓΗ Τ.Μ. (X, Y)

ΟΡΙΖΕΤΑΙ

$$COV(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ (ΓΙΑ ΕΥΚΟΛΙΑ

ΩΣ $COV(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ $X=Y$ Η ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΣΥΜΠΙΠΤΕΙ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ, ΔΙΟΤΙ

$$E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=E(X\cdot X)-E(X)\cdot E(X)$$
$$=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΕΣΤΩ $Z=\alpha X+\beta Y$ (α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

ΤΟΤΕ $VAR(Z)=\alpha^2 VAR(X)+\beta^2 VAR(Y)+2\alpha\cdot\beta\cdot COV(X,Y)$

(ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΑ $E(Z)=\alpha\cdot E(X)+\beta E(Y)$)

ΣΤΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ Τ.Μ. Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΩΣ:

$$\underbrace{\underbrace{\sum_i\sum_j x_i\cdot y_j\cdot f(x_i,y_j)}_{E(X\cdot Y)}-\underbrace{\Big(\sum_i x_i\cdot f_1(x_i)\Big)}_{E(X)}\cdot\underbrace{\Big(\sum_j y_j f_2(y_j)\Big)}_{E(Y)}}_{COV(X,Y)}$$

---

* ΠΡΟΣΟΧΗ: ΑΝ X ΚΑΙ Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΟΤΕ $COV(X,Y)=0$

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

8

ΠΑΡ

ΕΣΤΩ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ ΑΠΟ-ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ X ΚΑΙ Y

X \ Y	1	2	3	$f_1(x)$ ← ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ
0	0.1	0	0.1	0.2
1	0.3	0.1	0.1	0.5
2	0	0	0.3	0.3
$f_2(y)$	0.4	0.1	0.5	1

↗ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ

1) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $f(x,y)$ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ; ΝΑΙ ΔΙΟΤΙ ΑΝ ΠΡΟΣΘΕΣΟΥΜΕ ΟΛΑ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΘΑ ΒΡΟΥΜΕ 1 ($\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 0.1+0+0.1 + 0.3+0.1+0.1 + 0+0+0.3 = 1$)

ΚΑΙ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΟΛΑ ΤΑ $f(x_i, y_j) \geq 0$

$f(0,1) = 0.1 > 0$, $f(0,2) = 0$, $f(1,2) = 0.1 > 0$

ΚΛΠ...

⑨

(ΕΔΩ $f(0,1)=P(X=0,Y=1)$, $f(1,2)=P(X=1,Y=2)$, ΚΛΠ...)

2) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $E(X)$.

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $f_1(x)$ ΚΑΙ $f_2(y)$ ⟷ ΒΛΕΠΕ ΠΙΝΑΚΑ

(ΔΙΑΠΙΣΤΩΝΟΥΜΕ ΟΤΙ $f_1(x_1)+f_1(x_2)+f_1(x_3)=1$

ΚΑΙ $f_2(y_1)+f_2(y_2)+f_2(y_3)=1$

ΚΑΙ $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j)=1$)

$f_1(x_1)=0.2$, $f_1(x_2)=0.5$, $f_1(x_3)=0.3$

ΓΙΑ $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$

$\rightarrow E(X)=x_1 \cdot f_1(x_1)+x_2 \cdot f_1(x_2)+x_3 f_1(x_3)=1.1$

3) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $VAR(X)$

$$VAR(X)=(x_1-E(X))^2 \cdot f_1(x_1)+(x_2-E(X))^2 \cdot f_1(x_2) + (x_3-E(X))^2 \cdot f_1(x_3)$$

$$=(0-1.1)^2 \cdot (0.2)+(1-1.1)^2 \cdot (0.5) + (2-1.1)^2 \cdot (0.3) = 0.49$$

(ΑΣΚΗΣΗ: ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $VAR(X)=E(X^2)-(E(X))^2$)

10

4) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $cov(X,Y)$

ΠΡΩΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $E(X \cdot Y)$

$$E(XY) = x_1 \cdot y_1 \cdot f(x_1, y_1) + x_1 y_2 f(x_1, y_2) + x_1 \cdot y_3 f(x_1, y_3) + x_2 y_1 f(x_2, y_1) + \dots = 2.6$$

$(x_1 y_1 f(x_1, y_1) = 0 \times 1 \times (0.1) = 0,$

$x_1 y_2 f(x_1, y_2) = 0 \times 2 \times 0 = 0,$

$- -$

$x_3 y_3 f(x_3, y_3) = 2 \times 3 \times 0.3 = 1.8)$

$$cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $E(Y)$ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΡΟΠΟ ΤΟΥ $E(X)$ ΚΑΙ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ

$$E(Y) = 2.1$$

$$\to cov(X,Y) = 2.6 - (1.1) \times (2.1) = 0.29$$

Γ) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $VAR(X-Y)$

$$VAR(X-Y) = VAR(X) + VAR(Y) - 2cov(X,Y)$$

ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡ. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $VAR(Y)$ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΡΟΠΟ ΤΗΣ $VAR(X)$.

11

ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ $VAR(Y) = 0.89$

ΣΥΝΕΠΩΣ $VAR(X-Y) = 0.49 + 0.89 - 2\times(0.29)$
$= 0.6$

* ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΑΡΕΙ ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΣΕ ΑΝΤΙΘΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ)

6) ΕΙΝΑΙ X ΚΑΙ Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ;

ΑΠΟ ΠΙΝΑΚΑ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ

$f(1,2) = P(X=1, Y=2) = 0.1$.

ΚΑΙ $f_1(1) = P(X=1) = 0.5$

$f_2(2) = P(Y=2) = 0.1$

ΑΦΟΥ $f_1(1)\cdot f_2(2) = 0.05 \neq f(1,2)$

X ΚΑΙ Y **ΔΕΝ** ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ.

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- $COV(\alpha X, \beta Y) = \alpha.\beta.\, COV(X,Y)$
  (ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)
- ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΙΑ $VAR(\alpha X + \beta Y)$ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ. ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
  $VAR(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \alpha^2 VAR(X) + \beta^2 VAR(Y) + \gamma^2 VAR(Z) + 2\alpha\beta COV(X,Y) + 2\alpha\gamma COV(X,Z) + 2\beta\gamma COV(Y,Z)$

(12)

ΡΟΠΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΜΕ ΑΥΤΕΣ ΠΟΥ ΟΡΙΣΑΜΕ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.

ΡΟΠΗ ΤΑΞΗΣ r ΩΣ ΠΡΟΣ α:

$$ {}_{\alpha}\mu_r = E[(X-\alpha)^r] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\alpha)^r \cdot f(x_i) $$

ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ: $\alpha = 0$

$$ {}_{0}\mu_r = m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot f(x_i) $$

Ο ΜΕΣΟΣ ΕΙΝΑΙ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕ $r=1 \leftrightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

$=$ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ: $\alpha = E(X) = \mu(X) = \mu$

$$ {}_{E(X)}M_r = \mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^r \cdot f(x_i) $$

Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΜΕ $r=2 \leftrightarrow VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ $\mu_1 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ: ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $E(X^3)$ (ΑΠ. 2.9)