

Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 1 - Μέτρα Θέσης (Αριθμητικός Μέσος, Γεωμετρικός Μέσος, Αρμονικός Μέσος)

A. Λαδάς (a_ladas@upatras.gr)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

9/11/2020

Αριθμητικός Μέσος

Περιπτώσεις

- Σε μη ταξινομημένα δεδομένα:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

- Σε ταξινομημένα δεδομένα

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (2)$$

Στην περίπτωση που τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε τάξεις, το X_i είναι η κεντρική τιμή της i τάξης.

Άσκηση 1

Δίνονται οι τιμές για τον αριθμό των μαθητών 16 τμημάτων ενός μεγάλου Λυκείου της Πάτρας.

37,37,37,38,38,38,39,39,39,39,39,40,40,41,41,41.

Στον επόμενο πίνακα ταξινομούνται τα παραπάνω δεδομένα.

Αριθμός Μαθητών (X_i)	Συχνότητα (f_i)	$(X_i) * (f_i)$
37	3	
38	3	
39	5	
40	2	
41	3	
Σύνολο		

Πίνακας 1: Πίνακας Συχνοτήτων για τον αριθμό των μαθητών των 16 τμημάτων του Λυκείου.

Συνέχεια Άσκησης 1

Αριθμός Μαθητών (X_i)	Συχνότητα (f_i)	$(X_i) * (f_i)$
37	3	$37*3 = 111$
38	3	$38*3 = 114$
39	5	$39*5 = 195$
40	2	$40*2 = 80$
41	3	$41*3 = 123$
Σύνολο	16	623

Πίνακας 2: Πίνακας Συχνοτήτων για τον αριθμό των μαθητών των 16 τμημάτων του Λυκείου.

Συνέχεια Άσκησης 1

Για να υπολογίσω τον αριθμητικό μέσο του αριθμού των μαθητών του συγκεκριμένου λυκείου, θα χρησιμοποιήσω τον τύπο 2, καθώς τα δεδομένα είναι ταξινομημένα.

Οπότε,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{623}{16} = 38,93.$$

Άρα, αν όλες οι τάξεις είχαν τον ίδιο αριθμό μαθητών, τότε θα είχαν (περίπου) 39 μαθητές.

Άσκηση 2

Στον επόμενο πίνακα ομαδοποιούνται οι ηλικίες 50 εργατών ενός εργοστασίου.

Τάξη	Ηλικίες	Κεντρική Τιμή Τάξης (X_i)	Συχνότητα (f_i)	$(X_i) * (f_i)$
1	[20, 25)		4	
2	[25, 30)		15	
3	[30, 35)		11	
4	[35, 40)		10	
5	[40, 45)		5	
6	[45, 50)		3	
7	[50, 55)		1	
8	[55, 60)		1	
Σύνολο			50	

Πίνακας 3: Πίνακας Συχνοτήτων για τις ηλικίες των εργαζομένων του εργοστασίου.

Συνέχεια Άσκησης 2

Τάξη	Ηλικίες	Κεντρική Τιμή Τάξης (X_i)	Συχνότητα (f_i)	$(X_i) * (f_i)$
1	[20, 25)	22,5	4	90
2	[25, 30)	27,5	15	412,5
3	[30, 35)	32,5	11	357,5
4	[35, 40)	37,5	10	375
5	[40, 45)	42,5	5	212,5
6	[45, 50)	47,5	3	142,5
7	[50, 55)	52,5	1	52,5
8	[55, 60)	57,5	1	57,5
Σύνολο			50	1700

Πίνακας 4: Πίνακας Συχνοτήτων για τις ηλικίες των εργαζομένων του εργοστασίου.

Συνέχεια Άσκησης 2

Για να υπολογίσω τον αριθμητικό μέσο του αριθμού των εργαζομένων του συγκεκριμένου εργοστασίου, θα χρησιμοποιήσω τον τύπο 2, καθώς τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε τάξεις και άρα το X_i είναι η κεντρική τιμή της i τάξης.

Οπότε,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{1700}{50} = 34.$$

Άρα, αν όλοι οι εργαζόμενοι είχαν την ίδια ηλικία, τότε θα ήταν τα 34 έτη.

Γεωμετρικός Μέσος

Υπολογισμός

$$G = \sqrt[n]{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x'_i} \quad (3)$$

- Για τον υπολογισμό μέσου ποσοστού μεταβολής, $x'_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}$
- Για τον υπολογισμό μέσου ρυθμού μεταβολής, $x'_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$

Άσκηση 1

Στον επόμενο πίνακα δίνεται η μέση ετήσια τιμή σε € ενός βαρελιού πετρελαίου

Έτος	Τιμή
1999	24
2000	27
2001	28
2002	30
2003	34

Πίνακας 5: Μέση ετήσια τιμή πετρελαίου, σε €.

Συνέχεια Άσκησης 2

Για να υπολογίσω το μέσο ετήσιο ρυθμό μεταβολής, βρίσκω διαδοχικά

$$x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{27 - 24}{24} = \frac{3}{24} = 0,125$$

$$x'_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_2} = \frac{28 - 27}{27} = \frac{1}{27} = 0,037$$

$$x'_3 = \frac{x_4 - x_3}{x_3} = \frac{30 - 28}{28} = \frac{2}{28} = 0,071$$

$$x'_4 = \frac{x_5 - x_4}{x_4} = \frac{34 - 30}{30} = \frac{4}{30} = 0,133$$

$$\text{Άρα } G = \sqrt[4]{x'_1 x'_2 x'_3 x'_4} = \sqrt[4]{0,125 * 0,037 * 0,071 * 0,133} = 0,08129 = 8,129\%.$$

Συνεπώς, ο μέσος ετήσιος ρυθμός αύξησης είναι 8,129% το χρόνο.

Συνέχεια Άσκησης 2

Για να υπολογίσω το μέσο ετήσιο ποσοστό μεταβολής, βρίσκω διαδοχικά

$$x'_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{27}{24}$$

$$x'_2 = \frac{x_3}{x_2} = \frac{28}{27}$$

$$x'_3 = \frac{x_4}{x_3} = \frac{30}{28}$$

$$x'_4 = \frac{x_5}{x_4} = \frac{34}{30}$$

$$\text{Άρα } G = \sqrt[4]{x'_1 x'_2 x'_3 x'_4} = \sqrt[4]{\frac{27}{24} * \frac{28}{27} * \frac{30}{28} * \frac{34}{30}} = \sqrt[4]{\frac{34}{24}} = 1,09.$$

Συνεπώς, η μέση ετήσια αύξηση της τιμής του πετρελαίου είναι 9% το χρόνο.

Αρμονικός Μέσος

Ο Αρμονικός Μέσος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό μέσων ποσοστών χρόνου και σε προβλήματα αποστάσεων.

Υπολογισμός

- Για μη ταξινομημένες παρατηρήσεις

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (4)$$

- Για ταξινομημένες παρατηρήσεις

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i}} \quad (5)$$

Άσκηση 1

Η απόσταση μεταξύ δυο πόλεων A και B είναι 100 Km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την πόλη A για να φτάσει στην πόλη B με μέση ωριαία ταχύτητα 40Km/h, ενώ στην επιστροφή από την πόλη B στην πόλη A, η μέση ωριαία ταχύτητα είναι 50Km/h. Ποια είναι η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου σε όλη τη διάρκεια της διαδρομής;

Πρόκειται για κλασικό πρόβλημα αποστάσεων, οπότε θα χρειαστεί να υπολογίσω τον Αρμονικό Μέσο.

Έχουμε διαδοχικά.

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{50}} = 44,44 \text{ Km/h}$$