(1)

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΘΕΣΗΣ

• ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΘΕΣΗΣ

ΤΙΜΗ Η ΟΠΟΙΑ ΕΚΠΡΟΣΩΠΕΙ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΑΣΗ ΟΜΑΔΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ = ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ ΤΕΙΝΟΥΝ ΝΑ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΘΟΥΝ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΤΙΜΗ.

- ΜΕΣΟΙ

  • ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ → ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ Ή ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ. ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΔΟΘΕΙ ΣΕ 2 ΜΟΡΦΕΣ: ΑΠΛΟΣ, ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ.

ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΓΙΑ ΜΗ-ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ Ο ΑΠΛΟΣ ΜΕΣΟΣ ΕΙΝΑΙ $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$

ΟΠΟΥ $x_1, \dots, x_n$ ΕΙΝΑΙ n ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.

②

$\bar{X}$ = ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ $X_1, \ldots, X_n$ ($\bar{X}$= ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ)

ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΚΑΙ ΩΣ $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ:

$X_1, \ldots, X_k$ ΟΠΟΥ n_i ΕΙΝΑΙ Η ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ X_i $(1 \leq i \leq k)$, ΔΗΛΑΔΗ X_1 ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ n_1 ΦΟΡΕΣ, ..., X_k ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ n_k ΦΟΡΕΣ, ΕΧΟΥΜΕ $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n}$ ΚΑΙ $n = n_1 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ ΜΕ f_i ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ $\dfrac{n_i}{n}$. ΤΟΤΕ $\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i X_i$ ΚΑΙ $0 < f_i < 1$ ΚΑΙ $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$. ΤΑ f_i ΟΝΟΜΑΖΟΝΤΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ Ή ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ, ΚΑΙ $\boxed{\bar{X} = \text{ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ}}$.

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ Χ ΒΑΘΜΟΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΕ ΒΑΡΥΤΗΤΕΣ

$f_1 = \dfrac{2}{14}$, $f_2 = \dfrac{3}{14}$, $f_3 = \dfrac{4}{14}$, $f_4 = \dfrac{5}{14}$

(ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$)

(3)

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΓΙΑ ΝΑ ΠΕΡΑΣΕΙ ΤΗΝ ΤΑΞΗ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΝΑ ΕΧΕΙ ΜΕΣΟ ΟΡΟ ΒΑΘΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ 10 (ΜΕ ΑΡΙΣΤΑ ΤΟ 20), ΚΑΙ ΟΤΙ ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΤΟΥ ΗΤΑΝ: $X_1 = 10$, $X_2 = 12$, $X_3 = 9$, $X_4 = 9$

ΤΟΤΕ $\bar{X} = \frac{1}{14}(2\times 10 + 3\times 12 + 4\times 9 + 5\times 9)$

$= 9.78 < 10 \Rightarrow$ ΔΕΝ ΠΡΟΒΙΒΑΖΕΤΑΙ.

* ΑΝ ΟΜΩΣ ΟΛΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΙΧΑΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑ, ΔΗΛΑΔΗ

$\frac{n_1}{n} = \frac{n_2}{n} = \frac{n_3}{n} = \frac{n_4}{n}$ ΟΠΟΥ $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 4n_1 = 4n_2 = 4n_3 = 4n_4$

ΤΟΤΕ $\bar{X} = \left(\frac{n_1}{n}\right)X_1 + \left(\frac{n_2}{n}\right)X_2 + \left(\frac{n_3}{n}\right)X_3 + \left(\frac{n_4}{n}\right)X_4$

ΚΑΙ $\bar{X} = \left(\frac{n_1}{n}\right)X_1 + \left(\frac{n_1}{n}\right)X_2 + \left(\frac{n_1}{n}\right)X_3 + \left(\frac{n_1}{n}\right)X_4$

$= \left(\frac{n_1}{n}\right)\sum_{i=1}^{4} X_i$ ΚΑΙ $n = 4n_1$

$= \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{4}$

ΔΗΛΑΔΗ Ο ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΘΑ ΗΤΑΝ: $\frac{10+12+9+9}{4} = 10$

ΚΑΙ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ ΘΑ ΠΕΡΝΟΥΣΕ ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΤΑΞΗ.

ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΥΤΟ Η ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΒΑΘΜΟΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΑΛΛΑ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΕ ΜΗ-ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ → ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΕΣΤΩ ΤΩΡΑ ΟΤΙ Χ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΕ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΗ (ΤΑΞΙΝΟΜΗΜΕΝΗ) ΜΟΡΦΗ. (ΦΥΣΙΚΑ Χ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ). ΤΟΤΕ ΩΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ X_i ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΤΑΞΙΚΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ.

ΔΗΛΑΔΗ $X_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2}$ ΓΙΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ $e_{i-1} - e_i$, ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\bar{X}$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ.

ΠΑΡ.: ΕΣΤΩ Χ: ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΑ ΓΙΑ 73 ΕΡΓΑΤΕΣ

ΤΑΞΕΙΣ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΩΝ $[e_{i-1}, e_i)$	ΚΕΝΤΡΙΚΟΙ ΟΡΟΙ X_i	ΑΡΙΘ. ΕΡΓΑΤΩΝ n_i
$[15, 25)$	$X_1 = 20$	$5 = n_1$
$[25, 35)$	$X_2 = 30$	$13 = n_2$
$[35, 45)$	$X_3 = 40$	$20 = n_3$
$[45, 55)$	$X_4 = 50$	$35 = n_4$

$$\bar{X} = \frac{5 \times 20 + 13 \times 30 + 20 \times 40 + 35 \times 50}{73} = 41.64$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ: 41.64 ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΟ ΠΟΥ ΘΑ ΕΠΑΙΡΝΕ ΚΑΘΕ ΕΡΓΑΤΗΣ ΑΝ ΟΛΟΙ ΟΙ ΕΡΓΑΤΕΣ ΑΜΟΙΒΟΝΤΑΝ ΕΞΙΣΟΥ.

(5) Ο ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΕΝΑ ΣΦΑΛΜΑ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΑΝ ΕΙΧΑΜΕ ΤΑ ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ (ΑΤΑΞΙΝΟΜΗΤΑ) ΣΤΟΙΧΕΙΑ. ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟ ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΑ ΟΣΟ ΠΙΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ.

- ΚΑΛΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ:

ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ, ΔΗΛΑΔΗ ΕΣΤΩ $\overline{X}_1, ---, \overline{X}_k$ ΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΜΕΣΟΙ Κ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΟΠΟΥ $n_1, ---, n_k$ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ.

ΤΟΤΕ $$\overline{X} = \frac{n_1 \overline{X}_1 + --- + n_k \overline{X}_k}{n_1 + --- + n_k}$$

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΝΑ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ "ΜΕΓΑΛΟ" ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ 4 ΜΙΚΡΟΤΕΡΑ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΕΧΟΥΜΕ ΤΑ ΜΕΣΑ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΑ ΤΩΝ ΕΡΓΑΤΩΝ. ΤΟΤΕ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΚΑΙ ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ (ΓΙΑ ΤΟ "ΜΕΓΑΛΟ" ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ) ΜΕΣΟ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΟ.

(6) ΕΦΑΡΜΟΓΗ → ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟ	ΑΡΙΘ. ΕΡΓΑΤΩΝ	ΜΕΣΟ ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΟ
1	5	6
2	10	5.8
3	15	5.5
4	20	8

$$\bar{X} = \frac{6\times 5 + 5.8\times 10 + 5.5\times 15 + 8\times 20}{5+10+15+20} = \frac{330.5}{50}$$

$$= \boxed{6.61}$$

– ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ: $\bar{X}$ ΕΠΗΡΕΑΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΑΚΡΑΙΕΣ ΤΙΜΕΣ.

– ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

- ΕΣΤΩ $X_1, \ldots, X_n$ ΜΕ ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟ $\bar{X}$ ΤΟΤΕ $X_1 \pm \alpha, \ldots, X_n \pm \alpha$ (ΜΕ α ΣΤΑΘΕΡΑ) ΕΧΟΥΝ ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟ $\bar{X} \pm \alpha$.
- ΕΠΙΠΛΕΟΝ $\alpha X_1, \ldots, \alpha X_n$ ΕΧΟΥΝ ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟ $\alpha\bar{X}$

(ΑΠΟΔ: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i \pm \alpha)}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i \pm n\alpha}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} + \dfrac{\cancel{n}\alpha}{\cancel{n}}$,

ΚΑΙ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha X_i)}{n} = \alpha \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$)

7

- ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ (ΔΙΑΦΟΡΩΝ) ΤΟΥ ΑΡΙΘ. ΜΕΣΟΥ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΤΙΜΗ X_i ΕΙΝΑΙ 0, ΔΗΛΑΔΗ $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})=0$

(ΑΠΟΔ.: $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) = \sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{X} = \sum_{i=1}^{n}X_i - n\bar{X}$

$= \sum_{i=1}^{n}X_i - \cancel{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\cancel{n}} = 0$)

- ΑΝ $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \alpha$ (ΣΤΑΘΕΡΑ)

ΤΟΤΕ $\bar{X}=\alpha$ (ΔΙΟΤΙ $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} = \frac{\cancel{n}\alpha}{\cancel{n}}$)

- ΑΝ $\alpha \le X_i \le \beta$ (ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

ΤΟΤΕ $\alpha \le \bar{X} \le \beta$

- ΕΣΤΩ $Y_i = \alpha + \beta X_i$ (ΜΕ α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

ΤΟΤΕ $\bar{Y} = \alpha + \beta\bar{X}$

(ΔΙΟΤΙ $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta X_i}{n} = \frac{\cancel{n}\alpha}{\cancel{n}} + \beta\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$)

- $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)^2$ ΠΑΙΡΝΕΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΓΙΑ $\alpha = \bar{X}$

(ΑΠΟΔ. $\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)^2\right)'_{\alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)(X_i-\alpha)'_{\alpha}$

ΧΡΗΣΗ 1ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$= -2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}X_i = n\alpha \Leftrightarrow \hat{\alpha} = \bar{X}$

(8)

$\Leftrightarrow \hat{\alpha} =$ ΚΡΙΣΙΜΗ ΤΙΜΗ $= \bar{X}$

ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΓΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΜΕ ΧΡΗΣΗ

$2^{ης}$ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)^2\right)''_{\alpha} = \left(-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)\right)'_{\alpha} = -2(\underbrace{-1-1-\dots-1}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}}) = 2n$$

> 0

ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ ΣΤΟ $\bar{X}$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)^2$

ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ