(1)

ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΕΣΤΩ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΜΕ N ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ N_1 ΕΧΟΥΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ α ΚΑΙ N_2 ΕΧΟΥΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑ β ΚΑΙ $N_1+N_2=N$.

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΛΗΘΥΣΜΟ n ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ. ΖΗΤΑΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΠΟ ΤΑ n ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΟΥ ΕΠΙΛΕΞΑΜΕ ΤΥΧΑΙΑ ΤΑ x ΝΑ ΕΧΟΥΝ α ΚΑΙ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ $n-x$ ΝΑ ΕΧΟΥΝ β.

ΕΔΩ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ α ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ "ΕΠΙΤΥΧΙΑ" ΚΑΙ $X=$ ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ (ΦΥΣΙΚΑ $X=$ ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ.). Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΟΥ ΖΗΤΑΜΕ ΕΙΝΑΙ $P(X=x)$. ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ;

ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΠΙΛΕΞΟΥΜΕ x ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ N_1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ $C_{N_1}^{x}$ ΤΡΟΠΟΥΣ ΚΑΙ $(n-x)$ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ N_2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕ

$C_{N_2}^{n-x}$ ΤΡΟΠΟΥΣ $\rightarrow$ ΕΥΝΟΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ (ΣΕ ΑΡΙΘΜΟ) $C_{N_1}^{x} \cdot C_{N_2}^{n-x}$.

(2)

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΕΙΝΑΙ C_N^m.

$$\Rightarrow P(X=x) = \frac{C_{N_1}^{x} \cdot C_{N_2}^{m-x}}{C_N^m} = f(x)$$

= ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ

$\Leftrightarrow$ $\boxed{X \sim \text{ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ}}$

ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΩΣ $H(N, m, N_1)$ ΔΗΛΑΔΗ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> (ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

ΕΣΤΩ ΔΟΧΕΙΟ ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ a ΜΑΥΡΑ ΣΦΑΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ b ΛΕΥΚΑ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ $a+b=N$ ΚΑΙ ΕΣΤΩ $p = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{N}$ ΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΤΩΝ ΛΕΥΚΩΝ ΚΑΙ $q = 1-p = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{N}$ ΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΤΩΝ ΜΑΥΡΩΝ. ΑΥΤΟ ΤΟ ΠΑΡ. ΕΙΝΑΙ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΕ $b = Np$ ΚΑΙ $a = Nq$ ΔΗΛΑΔΗ $b = N_1$ ΚΑΙ $a = N_2$ (ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΑ $N_1 + N_2 = N$)

ΚΑΙ $P(X=x) = \dfrac{C^{x}_{Np} \cdot C^{n-x}_{Nq}}{C^{n}_{N}}$

(ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ΤΙΣ "ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ" ΣΕ ΘΕΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ).

* ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΑΝ ΕΙΧΑΜΕ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ X ΘΑ ΗΤΑΝ Η ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ, ΚΑΙ $P(X=x) = C^{x}_{n} p^{x} q^{n-x}$

$$= C^{x}_{n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{x}\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-x}$$

$$= C^{x}_{n} \frac{b^{x} a^{n-x}}{(a+b)^{n}}$$

ΕΔΩ $X \sim B(n,p)$ ΚΑΙ $p = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{N_1}{N}$

$\left(q = \dfrac{N-N_1}{N} = 1-p\right)$

Η ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ ΔΙΟΤΙ

1) $P(X=x) \geq 0$ ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΟ ΤΗΣ $P(X=x)$

2) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\min(N_1,n)} C^{x}_{N_1} \cdot C^{n-x}_{N_2} = C^{n}_{N}$

④

ΑΣ ΙΔΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ γ) ΣΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

ΑΝ $n=2$, $N_1=3$ ΚΑΙ $N=5$

(ΠΟΥ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ $N_2=2$)

ΤΟΤΕ

$$\sum_{x=0}^{\min(3,2)=2} C_{N_1}^{x} \cdot C_{N_2}^{n-x} = \underbrace{C_3^0 \cdot C_2^2}_{1} + \underbrace{C_3^1 \cdot C_2^1}_{6} + \underbrace{C_3^2 \cdot C_2^0}_{3}$$

$$= 10$$

ΚΑΙ $C_N^n = C_5^2 = 10$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\min(N_1,n)} P(X=x) = \frac{\sum_{x=0}^{\min(N_1,n)} C_{N_1}^{x} \cdot C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} = 1$$

ΕΣΤΩ $X \sim H$

ΤΟΤΕ (ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ β)

$X = X_1 + \cdots + X_n$, ΟΠΟΥ $X_i \sim$ BERNOULLI

ΔΗΛΑΔΗ $X_i = 1$ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ $\frac{N_1}{N} = p$

ΚΑΙ $X_i = 0$ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ $\frac{N-N_1}{N} = q$

ΟΜΩΣ ΕΔΩ ΟΙ Τ.Μ. X_i ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ. ΑΥΤΑ ΘΑ ΜΑΣ ΒΟΗΘΗΣΟΥΝ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ $E(X)$ ΚΑΙ $VAR(X)$

(Γ)

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ $E(X)$:

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

ΚΑΙ ΑΦΟΥ $X_i \sim$ BERNOULLI

$$\Rightarrow E(X_i) = p \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ΔΗΛΑΔΗ

$$E(X) = \underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}} = \boxed{np = n\frac{N_1}{N}}$$

- ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ $VAR(X)$:

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i<j} COV(X_i, X_j)$$

ΑΦΟΥ $X_i \sim$ BERNOULLI

$$\Rightarrow VAR(X_i) = pq$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) = \underbrace{pq + \dots + pq}_{n \text{ ΦΟΡΕΣ}} = npq$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $COV(X_i, X_j)$:

ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ $E(X_i X_j) = \sum_i \sum_j f(x_i, x_j) x_i x_j$

ΟΜΩΣ ΤΑ X_i ΚΑΙ X_j ΠΑΙΡΝΟΥΝ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ 0 ΚΑΙ 1 (ΑΦΟΥ ΕΙΝΑΙ BERNOULLI)

⑥

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j f(x_i, x_j) x_i \cdot x_j = P(X_i = 1, X_j = 1)$$

ΟΜΩΣ $X_i = 1$ ΜΕ $p = \dfrac{N_1}{N}$

(ΚΑΙ $X_i = 0$ ΜΕ $q = \dfrac{N - N_1}{N}$)

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1 - 1}{N - 1}\right)$$ ΛΟΓΩ ΤΗΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗΣ

$$\Rightarrow E(X_i \cdot X_j) = \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1 - 1}{N - 1}\right)$$

ΚΑΙ $E(X_i) = \dfrac{N_1}{N} = p$, $E(X_j) = \dfrac{N_1}{N} = p$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N_1 - 1}{N - 1}\right) - \frac{N_1^2}{N^2}$$

$$= \dots = \frac{-pq}{N-1}$$

$$\Rightarrow VAR(X) = npq - 2C_n^2 \frac{pq}{N-1}$$

$$= \boxed{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \boxed{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ ΤΗΣ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑ ΜΕ ΑΥΤΗΝ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ

7

ΚΑΙ ΟΤΙ Η ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΑΠΟ ΑΥΤΗ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑ ΕΝΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ, ΔΗΛΑΔΗ ΚΑΤΑ $\frac{N-m}{N-1}$ Ο ΟΠΟΙΟΣ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ. ΟΤΑΝ $N \to \infty$ (ΤΟΤΕ $\frac{N-m}{N-1} \to 1$) ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ Η ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ. (ΓΙΑ ΠΑΡ.

$$VAR(K) = mpq\left(\frac{N-m}{N-1}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} mpq =$$ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ)

ΔΗΛΑΔΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΜΕ ΚΑΙ ΧΩΡΙΣ ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΚΑΤΑΛΗΓΟΥΝ ΣΤΟ ΙΔΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ.

ΠΑΡ: ΜΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ ΕΧΕΙ 10 ΑΠΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΟΥΣ ΕΚ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ 3 ΠΑΙΡΝΟΥΝ ΜΗΝΙΑΙΟ ΜΙΣΘΟ ΚΑΙ 7 ΗΜΕΡΟΜΙΣΘΙΟ. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΤΥΧΑΙΑ 2 ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΑΠΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΩΝ.

(8)

1) ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΜΗΝ ΕΠΙΛΕΓΕΙ ΚΑΝΕΙΣ ΜΕ ΜΗΝΙΑΙΟ ΜΙΣΘΟ;

ΑΠ: ΕΣΤΩ X = ΑΡΙΘ. ΤΩΝ ΑΜΕΙΒΟΜΕΝΩΝ ΜΕ ΜΗΝΙΑΙΟ ΜΙΣΘΟ. ΤΟΤΕ $X \sim H(10,2,3)$.
ΠΟΥ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΕ Τ.Δ. 2 ΑΠΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΩΝ

ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ $\Rightarrow P(X=x) = \dfrac{C_3^x C_7^{2-x}}{C_{10}^2}$

ΚΑΙ ΖΗΤΕΙΤΑΙ $P(X=0)$

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_7^2}{C_{10}^2} = 0.467$$

2) ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΠΙΛΕΓΕΙ ΕΝΑΣ ΜΕ ΜΗΝΙΑΙΟ ΜΙΣΘΟ;

ΑΠ. $P(X=1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} = 0.467$

3) ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΠΙΛΕΓΕΙ ΤΟ ΠΟΥΥ ΕΝΑΣ ΜΕ ΜΗΝΙΑΙΟ ΜΙΣΘΟ;

ΑΠ. $P(X \leq 1) = F(1)$

ΔΗΛΑΔΗ ΖΗΤΕΙΤΑΙ Η ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + \cdots + P(X=x)$

$$F(1) = \underbrace{P(X=0)}_{f(0)} + \underbrace{P(X=1)}_{f(1)} = 0.934$$

4) ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ $E(X)$ ΚΑΙ $VAR(X)$

ΑΠ. $E(X) = n\frac{N_1}{N} = 2\left(\frac{3}{10}\right) = 0.6$

$$VAR(X) = 2\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{10-2}{10-1}\right) = 0.373$$

* ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΕΝΑΣ ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΩΣΤΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΩΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΙΝΑΙ: $n < (0.05)\cdot N$

ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡ. ΑΥΤΟ $n = 2$ ΚΑΙ $N = 10$

$(0.05)\cdot N = (0.05)(10) = 0.5 \Rightarrow$ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ $\Rightarrow$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΗ Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ $B(2, 0.3)$

(ΕΔΩ $p = \frac{N_1}{N} = \frac{3}{10}$)

ΓΙΑ ΠΑΡ. ΑΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΣΑΜΕ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΘΑ ΒΡΙΣΚΑΜΕ

$$P(X=0) = C_2^0\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^{2-0} = 0.49 \neq 0.467$$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ $VAR(X) = npq = 2\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) = 0.42 \neq 0.373$