Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 1 - Τυχαίες Μεταβλητές

Α. Λαδάς (*a_ladas@upatras.gr*)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

14/12/2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Άσκηση 1

Ας θεωρήσουμε ένα παιχνίδι με ζάρι, όπου το κέρδος του παίχτη μετά από κάθε ρίψη του ζαριού καθορίζεται ως εξής:

- Αν ο παίχτης φέρει 2 ή 3 ή 4, κερδίζει 20 €
- Αν ο παίχτης φέρει 1 ή 6, χάνει 30 €
- Αν ο παίχτης φέρει 5, ούτε κερδίζει ούτε χάνει.

Ερωτήσεις:

1. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας του κέρδους.
2. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος του παίχτη;
3. Ποιά είναι η διακύμανση του κέρδους του παίχτη;

Συνέχεια Άσκησης 1

1. Έστω X το αποτέλεσμα του ζαριού. Γνωρίζουμε ότι με πιθανότητα $P(X{=}2) = P(X{=}3) = P(X{=}4) = \frac{1}{6}$.
   Άρα, η πιθανότητα το κέρδος (K) να είναι 20 €,
   $P(K{=}20) = P(X{=}2) + P(X{=}3) + P(X{=}4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
   Αντίστοιχα, η πιθανότητα το κέρδος να είναι -30€,
   $P(K{=}{-30}) = P(X{=}1) + P(X{=}6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
   Τέλος, η πιθανότητα το κέρδος να είναι 0€,
   $P(K{=}0) = P(X{=}5) = \frac{1}{6}$.

   Άρα η συνάρτηση πιθανότητας του κέρδους είναι:

$$\begin{cases} 20, & P_k = \frac{1}{2} \\ -30, & P_k = \frac{1}{3} \\ 0, & P_k = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Συνέχεια Άσκησης 1

2. Γνωρίζω τη συνάρτηση πιθανότητας του κέρδους, άρα μπορώ να υπολογίσω το αναμενόμενο κέρδος, ως εξής:
   $\mathrm{E(K)} = \sum \mathrm{KP(K{=}\kappa)} = 20*\frac{1}{2} + (\text{-}30)*\frac{1}{3} + 0*\frac{1}{6} = 0.$
3. Για να βρω τη διακύμανση του κέρδους, θα χρησιμοποιήσω τον τύπο:
   $\mathrm{Var(K)} = E(K^2) - E^2(K)$. Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσω το $E(K^2)$, ως εξής:
   $E(K^2) = \sum K^2\ \mathrm{P(K{=}\kappa)} = (20)^2*\frac{1}{2} + (-30)^2*\frac{1}{3} + 0^2*\frac{1}{6} = \frac{400}{2} + \frac{900}{3} = 200 + 300 = 500.$
   Άρα, $\mathrm{Var(K)} = E(K^2) - E^2(K) = 500 - 0 = 500$

Άσκηση 2

Δίνεται η τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(X)

$$\begin{cases} kx^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ερωτήσεις:

1. Να βρεθεί η σταθερά k έτσι ώστε η συνάρτηση f(X) να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
2. Να βρεθεί η πιθανότητα P$(1 < X < 2)$.
3. Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X.
4. Να βρεθεί η αρχική ροπή δεύτερης τάξης **(αφήνεται για εξάσκηση)**
5. Να βρεθεί η διακύμανση της X.**(αφήνεται για εξάσκηση)**
6. Να βρεθεί η ροπή δεύτερης τάξης της X γύρω από το 1.**(αφήνεται για εξάσκηση)**

Συνέχεια Άσκησης 2

1. Αφού η f(X) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, άρα ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} kx^2\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = 1$$

$\Leftrightarrow 0 + \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 0 = 1 \Leftrightarrow k\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 9k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$

Συνέχεια Άσκησης 2

2. $P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)\,dx$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{9}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3-1^3}{27}\right) = \frac{7}{27}$$

Συνέχεια Άσκησης 2

3. $$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^3 x\frac{x^2}{9}\,dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9}\,dx = \left(\frac{x^4}{36}\right)_0^3 = \frac{3^4 - 0^4}{36} = \frac{81}{36}$$

Συνέχεια Άσκησης 2

4. $E(X^2) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$= \ldots = \frac{27}{5}$

5. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \ldots = \frac{27}{80}$

6. $E((X-1)^2) = E(X^2 - 2X + 1) = \ldots = \frac{38}{20}$

Άσκηση 3

Έστω η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y

X \Y	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$P(x)$
X=**0**	0.1	0	0.1	0.2
X=**1**	0.3	0.1	0.1	0.5
X=**2**	0	0	0.3	0.3
$P(y)$	0.4	0.1	0.5	1

Ερωτήσεις:

1. Να δείξετε ότι η $P(y)$ είναι καλά ορισμένη.
2. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;
3. Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. Y;
4. Ποιά είναι η διακύμανση της τ.μ. Y;
5. Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση των τ.μ. X, Y.
6. Να υπολογιστεί η $Var(3X - 4Y)$

Συνέχεια Άσκησης 3

1. Για να δείξουμε ότι η $P(y)$ είναι καλά ορισμένη, θα πρέπει να δείξουμε ότι:
   - $P(y = i) > 0$, για $i = 1, 2, 3$.
     Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:
     $P(y = 1) = 0.4$, $P(y = 2) = 0.1$, $P(y = 3) = 0.5$ και άρα όλες οι τιμές είναι θετικές.
   - $\sum_{i=1}^{3} P(y) = 1$. $\sum_{i=1}^{3} P(y) = 0.4 + 0.1 + 0.5 = 1$. Άρα η $P(y)$ είναι καλά ορισμένη.
2. Για να είναι ανεξάρτητες οι X και Y, θα πρέπει $P(x, y) = P(x)P(y)$ για όλα τα ζεύγη (X, Y). Αν μπορώ να βρω έστω και ένα ζευγάρι που να μην ισχύει η ισότητα, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.
   Μπορώ να παρατηρήσω ότι $P(x = 1, y = 3) = 0.1$, ενώ $P(x = 1)P(y = 3) = 0.5 * 0.5 = 0.25 \neq 0.1 = P(x = 1, y = 3)$. Άρα οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Συνέχεια Άσκησης 3

3. $E(Y) = \sum_{i=1}^{3} yP(Y = y) = 1 * 0.4 + 2 * 0.1 + 3 * 0.5 = 0.4 + 0.2 + 1.5 = 2.1$

4. $Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$. Θα πρέπει να υπολογίσω την ποσότητα $E(Y^2)$, ως εξής:
$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{3} y^2 P(Y = y) = 1^2 * 0.4 + 2^2 * 0.1 + 3^2 * 0.5 = 0.4 + 0.4 + 4.5 = 5.3$
Άρα
$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 5.3 - (2.1)^2 = 5.3 - 4.41 = 0.89.$

Η ίδια διαδικασία για την τ.μ. X αφήνεται ως εξάσκηση.

Συνέχεια Άσκησης 3

5. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Αφού έχω διαθέσιμες τις αναμενόμενες τιμές για τις δυο μεταβλητές, αρκεί να υπολογίσω την ποσότητα $E(XY)$, ως εξής:
$E(XY) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} xyP(X=x, Y=y) =$
$0*1*P(X=0,Y=1) + 0*2*P(X=0,Y=2) + 0*3*P(X=0,Y=3) +$
$1*1*P(X=1,Y=1) + 1*2*P(X=1,Y=2) + 1*3*P(X=1,Y=3) +$
$2*1*P(X=2,Y=1) + 2*2*P(X=2,Y=2) + 2*3*P(X=2,Y=3) =$
$0*1*0.1 + 0*2*0 + 0*3*0.1 +$
$1*1*0.3 + 1*2*0.1 + 1*3*0.1 +$
$2*1*0 + 2*2*0 + 2*3*0.3 = 0.3 + 0.2 + 0.3 + 1.8 = 2.6$
Άρα, $Cov(X,Y) = 2.6 - (1.1)(2.1) = 0.29$.

Συνέχεια Άσκησης 3

6. Για να υπολογίσουμε την $Var(3X - 4Y)$, θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής τύπους:
   - $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
   - $Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) \pm 2abCov(X, Y)$

   Άρα,
   $Var(3X - 4Y) = 3^2 Var(X) + 4^2 Var(Y) - 2 * 3 * 4 * Cov(X, Y) =$
   $9 * 0.49 + 16 * 0.89 - 24 * 0.29 = 4.41 + 14, 24 - 6.96 = 11.69$