① ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 3

ΕΣΤΩ ΟΤΙ X = ΣΥΝΕΧΗΣ Τ.Μ.

- ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ X ΕΙΝΑΙ $f(x)$ (ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ Χ ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ.) ΚΑΙ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ $\int$ ΑΝΤΙ Σ ΣΤΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ)

(ΔΗΛΑΔΗ $f(x)$ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ)

* ΠΡΟΣΟΧΗ: X ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΑΡΕΙ ΑΠΕΙΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΜΕΣΑ ΣΕ ΚΑΠΟΙΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΠΑΡΕΙ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΤΙΜΗ x_0 ΕΙΝΑΙ 0 $(P(X=x_0)=0)$

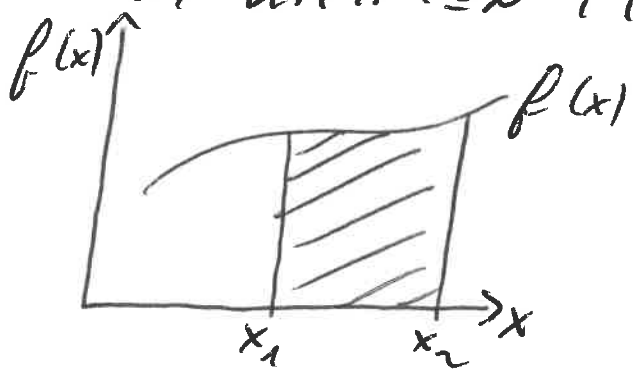
- ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

ΚΑΙ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $F'(x) = f(x)$

②

- ΣΥΝΗΘΩΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΜΑΣΤΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΕΜΒΑΔΑ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΗΣ $f(x)$ ΚΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΚΑΠΟΙΩΝ ΤΙΜΩΝ x_1 ΚΑΙ x_2.



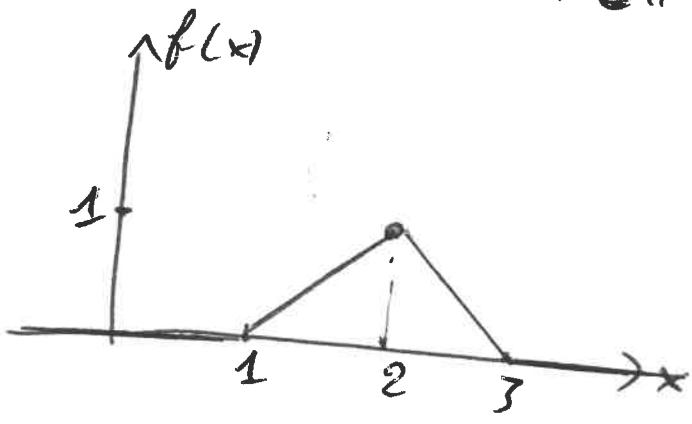
ΑΥΤΑ ΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΙΝΑΙ $P(x_1 \leq X \leq x_2)$
ΚΑΙ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X < x_2)$
$= P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

<u>ΠΑΡ.</u> ΕΣΤΩ $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{ΓΙΑ } 1 \leq x < 2 \\ 3-x & \text{ΓΙΑ } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{ΓΙΑ } x \in \mathbb{R} - [1,3) \end{cases}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



1) ΕΙΝΑΙ $f(x)$ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ;

ΓΙΑ $1 \leq x < 2$ $f(x) \geq 0$
ΓΙΑ $2 \leq x < 3$ $f(x) > 0$ → ΙΣΧΥΕΙ Η $1^{η}$ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ
ΚΑΙ $f(x) = 0$ ΑΛΛΟΥ

(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dx}_{=0} + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx + \int_{2}^{3}(3-x)\,dx + \underbrace{\int_{3}^{+\infty} 0\cdot dx}_{=0}$$

ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ Η 2η ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΗ. ΑΡΑ $f(x)$ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ (ΔΗΛΑΔΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ $E(X)$

ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = \mu$

ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ.

$$E(X) = \int_{1}^{2} x(x-1)\,dx + \int_{2}^{3} x(3-x)\,dx$$

(ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΜΕ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΜΕΛΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΘΑ ΕΙΝΑΙ 0)

$\rightarrow E(X) = \dots = 2$ (ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ)

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ VAR(X)

$$VAR(X) = E[X - E(X)]^2$$

ΜΕ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \mu$

ΔΗΛΑΔΗ

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx}_{E(X^2)} - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right)^2$$

$$E(X^2) - (\underbrace{E(X)}_{\mu})^2$$

ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ.

$$VAR(X) = \int_1^2 x^2(x-1)\,dx - \left(\int_1^2 x(x-1)\,dx\right)^2$$

$$+ \int_2^3 x^2(3-x)\,dx - \left(\int_2^3 x(3-x)\,dx\right)^2$$

$$= \text{---} \text{ ΚΛΠ} \text{---}$$

5

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ $E(X)$; VAR(X) ΚΑΙ COV(X,Y)

ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΕΣ ΜΕ ΑΥΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ Τ.Μ. ΜΟΝΟ ΠΟΥ ΤΩΡΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ $\int$ ΑΝΤΙ Σ.

- ΠΑΡ. ΕΣΤΩ $Y = \alpha + \beta X$ (α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

$$E(Y) = E(\alpha + \beta X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha + \beta x) f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x)\,dx + \int \beta x f(x)\,dx$$

$$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1} + \beta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{E(X)}$$

$$\rightarrow E(Y) = \alpha + \beta . E(X)$$

- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

ΕΔΩ $E(\alpha X + \beta Y)$ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta y) f(x,y)\,dx\,dy$$

- $E(XY) = E(X) . E(Y)$ ΑΝ X, Y ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

ΟΠΟΥ $E(XY)$ ΕΙΝΑΙ

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

⑥

ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ Τ.Μ, ΑΝ Χ,Υ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΟΤΕ $cov(X,Y)=0$ ΚΑΙ ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΙΣΧΥΕΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ.

ΣΤΙΣ 2 ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΧΟΥΜΕ ΖΕΥΓΟΣ Τ.Μ. (Χ,Υ). ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ 1 Τ.Μ, ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΣΧΥΟΥΝ ΚΑΙ ΕΔΩ ΟΙ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΔΗΛΑΔΗ ΠΡΕΠΕΙ

$f(x,y) \geq 0$ ΚΑΙ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$).

- ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\,dy\right)$$

ΑΝ $X=Y$ ΤΟΤΕ $cov(X,X) = VAR(X)$

- ΕΣΤΩ $Y = \alpha + \beta X$ (α, β ΣΤΑΘΕΡΕΣ)

$\rightarrow VAR(Y) = \beta^2 VAR(X)$

(ΔΙΟΤΙ $VAR(Y) = E[\alpha+\beta X - E(\alpha+\beta X)]^2$

$$= \int (\alpha+\beta x - E(\alpha+\beta X))^2 f(x)\,dx$$

$$= \int (\beta x - \beta E(X))^2 f(x)\,dx$$

$$= \beta^2 \int (x - E(X))^2 f(x)\,dx)$$

7

ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΔΙΝΕΤΑΙ $f(x,y)$ = ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΖΕΥΓΟΥΣ (x,y).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $f_1(x)$ ΚΑΙ $f_2(y)$:

$$f_1(x)=\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du, \quad f_2(y)=\int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,du$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$

ΚΑΙ $f(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ Τ.Μ

ΓΙΑ ΝΑ ΕΛΕΓΞΟΥΜΕ ΑΝ ΟΙ Τ.Μ. Χ ΚΑΙ Υ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ. ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ ΚΑΙ ΑΝ ΝΑΙ ΤΟΤΕ Χ,Υ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ.

8

ΡΟΠΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

- ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ r ΤΑΞΗΣ

$$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x)\,dx$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΙΑ $r=1$,

$$m_1 = E(X)$$

- ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ r ΤΑΞΗΣ

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r \cdot f(x)\,dx$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΙΑ $r=2$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = VAR(X)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1) ΕΣΤΩ Η ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ Χ.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{ΓΙΑ } x \geq 0 \\ 0 & \text{ΓΙΑ } x < 0 \end{cases}$$

α) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ Χ.

9

ΑΠ.: ΖΗΤΕΙΤΑΙ $f(x) = F'(x)$

ΚΑΙ $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{ΓΙΑ } x \geq 0 \\ 0 & \text{ΓΙΑ } x < 0 \end{cases}$

β) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $P(X>2)$

ΑΠ. $P(X>2) = \int_2^{\infty} f(u)\,du$

ΚΑΙ $f(u) = 2e^{-2u}$

$\rightarrow \int_2^{\infty} 2e^{-2u}\,du = 2\int_2^{\infty} e^{-2u}\,du = \dots = e^{-4}$

ΕΧΟΥΜΕ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. ΑΝ ΑΥΤΟ ΜΑΣ ΔΥΣΚΟΛΕΥΕΙ ΤΟΤΕ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ ΑΛΛΗ ΜΕΘΟΔΟ:

ΞΕΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $P(X \leq 2) = F(2)$

$= 1 - e^{-4}$

ΚΑΙ ΟΤΙ $P(X>2) + P(X \leq 2) = 1$

$\rightarrow P(X>2) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$

γ) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $P(-3 < X \leq 4)$.

ΑΠ. $P(-3 < X \leq 4) = \int_{-3}^{4} f(u)\,du$

$= \underbrace{\int_{-3}^{0} f(u)\,du}_{0} + \int_0^4 f(u)\,du$

(10)

$$P(-3<X\le 4)=\int_0^4 2e^{-u}\,du=\cdots=1-e^{-8}$$

2) α) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ Η ΣΤΑΘΕΡΑ Κ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x)=\begin{cases} Kx^2 & \text{ΓΙΑ } 0<x<3 \\ 0 & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ: ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ $K\ge 0$ ΚΑΙ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

$$=\underbrace{\int_0^3 Kx^2\,dx}_{\frac{1}{3}[Kx^3]_0^3}=\cdots=9K=1\Rightarrow K=1/9>0$$

β) ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ $P(1<X<2)$.

ΑΠ. $P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{x^2}{9}\,dx=\frac{1}{27}[x^3]_1^2=\frac{7}{27}$

γ) ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ $E(X)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_0^3 x\left(\frac{x^2}{9}\right)dx=\frac{1}{9}\int_0^3 x^3\,dx$$

(ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ $1^{ης}$ ΤΑΞΗΣ) $=\cdots=9/4$

(11)

δ) ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Η ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ.

ΑΠ. ΖΗΤΑΜΕ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\left(\frac{x^2}{9}\right)dx$

$= \frac{1}{9}\int_0^3 x^4\,dx = \dots = \frac{243}{45}$

ε) ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ VAR(X)

ΑΠ. $VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots$

ΤΑ ΕΧΟΥΜΕ ΒΡΕΙ

ζ) ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ Η ΡΟΠΗ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ 1.

ΑΠ. ΖΗΤΑΜΕ $E[(X-1)^2]$

$= E(X^2 - 2X + 1) = E(X^2) - 2E(X) + 1$

$= \dots$

3) ΕΣΤΩ Η ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΖΕΥΓΟΥΣ (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{ΓΙΑ } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \\ 0 & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

α) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ Η ΠΕΡΙΘΩΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $f_1(x)$

(12)

ΑΠ. ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ

$$f_1(x) = \int_{u=0}^{x} 8xu\,du = 8x\int_{u=0}^{x} u\,du = 8x\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 8x\left(\frac{x^2}{2}\right) = 4x^3$$

β) ΝΑ ΕΛΕΓΧΘΟΥΝ ΟΙ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΩΣΤΕ $f_1(x)$ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΑΠ. • $f_1(x) \geq 0$ ΑΦΟΥ $x \in [0,1)$

• $$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx = 4\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 1$$

→ $f_1(x)$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

γ) ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $E(X)$

ΑΠ. $$E(X) = \int_0^1 x(4x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \ldots = 4/5$$