1

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (Τ.Μ.)

Τ.Μ. = ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ Π.Ο. ΤΟΝ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ Ω (ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ) ΚΑΙ Π.Τ. $\subseteq \mathbb{R}$ → ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$:

$$X: \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega_i \to X(\omega_i) = x_i \end{array}$$

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ Η ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΡΙΨΗ 2 ΚΕΡΜΑΤΩΝ

X = ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΝΔΕΙΞΕΩΝ "Γ"

(X = ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ)

$$\Omega = \{ \underset{\omega_1}{(K,K)}, \underset{\omega_2}{(K,\Gamma)}, \underset{\omega_3}{(\Gamma,K)}, \underset{\omega_4}{(\Gamma,\Gamma)} \}$$

$$X: \begin{array}{l} \Omega \to X(\Omega) \\ \omega_i \to X(\omega_i) = x_i \end{array}$$

$X(\omega_1) = x_1 = 0$ (ΚΑΝΕΝΑ "Γ")

$X(\omega_2) = x_2 = X(\omega_3) = x_3 = 1$ (ΕΝΑ "Γ")

$X(\omega_4) = x_4 = 2$ (ΔΥΟ "Γ")

X ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΗ Ή ΣΥΝΕΧΗΣ.

X ΔΙΑΚΡΙΤΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (ΤΗΣ X)

ΣΕ ΚΑΘΕ ΤΙΜΗ ΤΗΣ X ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΟΠΟΙΑ Η ΤΙΜΗ ΑΥΤΗ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ; ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) = P(X=x)$ ΜΕ Π.Ο. ΤΟ Π.Τ. ΤΗΣ X ΚΑΙ Π.Τ. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ X.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΗΡΕΙ f:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_x f(x) = 1$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ: ΑΚΙΔΩΤΟ ΣΤΟ ΟΠΟΙΟ ΑΝΑΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ (ΑΝΤΙ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ)

ΠΑΡ: ΠΕΙΡΑΜΑ: ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΡΙΨΗ 5 ΚΕΡΜΑΤΩΝ

ΕΣΤΩ X = ΑΡΙΘ. ΕΝΔΕΙΞΕΩΝ "Κ".

ΠΟΙΑ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ X;

(3)

ΠΟΙΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ; ΕΧΟΥΜΕ

$$\left.\begin{array}{c}(K,K,K,K,K)\\(K,K,K,K,\Gamma)\\(K,K,K,\Gamma,K)\\\vdots\\(\Gamma,\Gamma,\Gamma,\Gamma,\Gamma)\end{array}\right\}$$

ΑΝ ΤΟ ΚΑΝΟΥΜΕ "ΣΤΟ ΧΕΡΙ" ΘΑ ΔΟΥΜΕ 32 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Ο ΑΡΙΘ. 32 ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΠΟ ΤΥΧ. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΜΕ ΕΠΑΝΑΘΕΣΗ $\rightarrow$ ΑΦΟΥ ΕΧΟΥΜΕ 2 ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΚΕΡΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΘΕΩΡΗΣΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΧΟΥΜΕ 5 ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ "ΡΙΨΗ ΚΕΡΜΑΤΟΣ", ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ Ο ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΩΣ $2^5 = 32$.

ΕΣΤΩ ΟΤΙ $X=0$ (ΚΑΜΙΑ "Κ")

$X=1$ (ΜΙΑ "Κ")

$X=2$ (ΔΥΟ "Κ")

$X=5$ (ΠΕΝΤΕ "Κ" = ΟΛΑ)

$$f(0) = P(X=0) = \frac{\text{ΑΡΙΘ. ΕΥΝ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ}}{\text{ΣΥΝΟΛ. ΑΡΙΘ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ}}$$

$X=0 \leftrightarrow$ ΚΑΜΙΑ "Κ" $\leftrightarrow$ ΟΛΑ "Γ" $\leftrightarrow$ ΑΥΤΟ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΜΟΝΟ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ, Γ, Γ, Γ, Γ

$\Rightarrow$ ΑΡΙΘ. ΕΥΝ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ $= 1$

ΚΑΙ Ο ΣΥΝΟΛ. ΑΡΙΘ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ $= 32$

ΣΥΝΕΠΩΣ $f(0) = \frac{1}{32} = P(X=0)$

ΜΕ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ $f(1) = \frac{5}{32}$ $= P(X=1)$ (ΔΙΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ 5 ΔΥΝΑΤΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΝΑ "Κ" ΣΤΑ ΠΕΝΤΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (Κ, Γ, Γ, Γ, Γ), (Γ, Κ, Γ, Γ, Γ), (Γ, Γ, Κ, Γ, Γ), (Γ, Γ, Γ, Κ, Γ), (Γ, Γ, Γ, Γ, Κ)

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ: $f(2) = \frac{10}{32} = P(X=2)$, $f(3) = \frac{10}{32} = P(X=3)$, $f(4) = \frac{5}{32} = P(X=4)$,

$f(5) = \frac{1}{32} = P(X=5)$

ΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ x ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ 5, ΔΗΛΑΔΗ, ΓΙΑ $f(0)$ Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ $1 = C^0_5$, ΓΙΑ $f(1)$ Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ $5 = C^1_5$, ΓΙΑ $f(2)$ Ο ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ $10 = C^2_5$, ΚΛΠ...

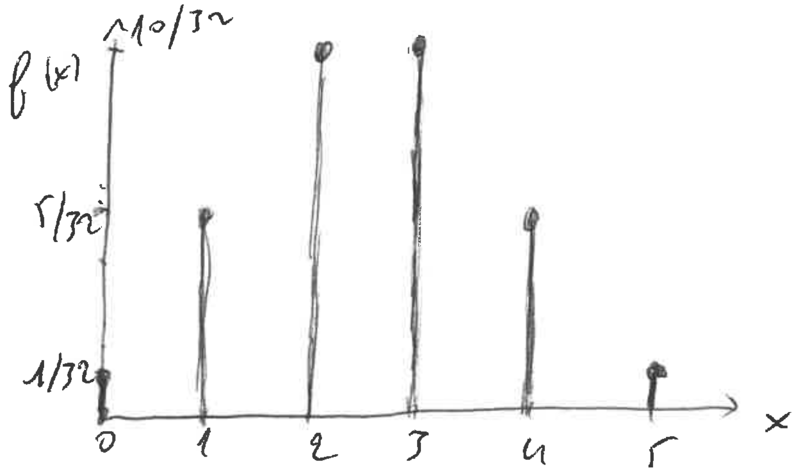
ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$f(x) = \frac{C^x_5}{2^5} = \frac{C^x_5}{32}$$

(C^x_5 ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΚΑΙ $\binom{5}{x}$)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ:

ΑΚΙΔΩΤΟ



5

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ~~Ι~~ ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ, ΔΗΛΑΔΗ ΟΛΑ ΤΑ $f(x_i) > 0$ ΚΑΙ $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1$

$= f(0) + f(1) + \dots + f(5) = 1$

$\rightarrow f$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

<u>ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ</u> (ΤΗΣ X)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ : $F(x)$

ΚΑΙ $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ

$F(x) = 0$ ΟΤΑΝ $x <$ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ X

$F(x) = 1$ ΟΤΑΝ $x \geq$ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ X

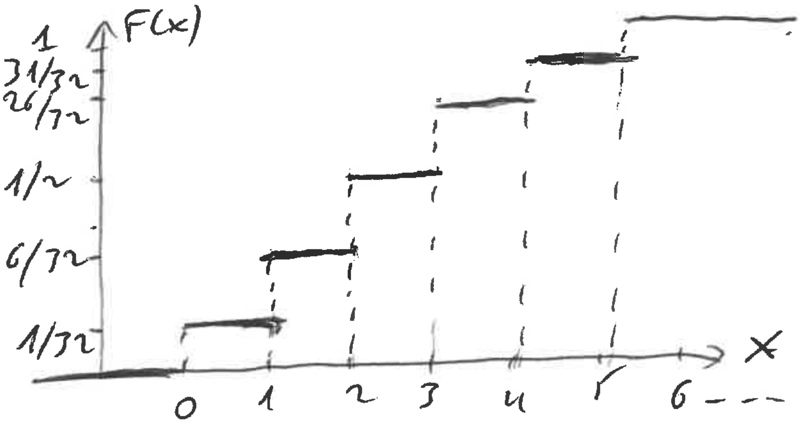
· $F(x)$ ΟΧΙ ΦΘΙΝΟΥΣΑ, ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΕ ΚΑΘΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ 2 ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.

ΓΙΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΠΑΡ. ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ΓΙΑ } x < 0 \\ 1/32 & \text{ΓΙΑ } 0 \leq x < 1 \\ 1/32 + 5/32 = 6/32 & \text{ΓΙΑ } 1 \leq x < 2 \\ 6/32 + 10/32 = 1/2 & \text{ΓΙΑ } 2 \leq x < 3 \\ 26/32 & \text{ΓΙΑ } 3 \leq x < 4 \\ 31/32 & \text{ΓΙΑ } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{ΓΙΑ } 5 \leq x \end{cases}$$

⑥

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ: ΑΚΙΔΩΤΟ



(ΒΑΘΜΩΤΟ ΟΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙ ΓΙΑ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ Τ.Μ.)

- $P(X=a)=F(a)-F(a-1)$
- $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$
- $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a-1)$
- $P(a<X<b)=F(b-1)-F(a)$
- $P(a\leq X<b)=F(b-1)-F(a-1)$

Η $1^η$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ = ΕΥΚΟΛΗ.

ΕΠΙΣΗΣ ΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣΟΥΜΕ $2^η$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ:

$P(a<X\leq b)=;$ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ Ω ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ $X\leq a$, $a<X\leq b$ ΚΑΙ $X>b$, ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ $\rightarrow$

$$P(X\leq a)+P(a<X\leq b)+P(X>b)=P(\Omega)=1$$

ΣΥΝΕΠΩΣ
$$P(a<X\leq b)=1-P(X\leq a)-P(X>b)$$
$$=1-F(a)-[1-P(X\leq b)]$$

7

ΑΦΟΥ $P(X \leq b) + P(X > b) = 1$

($\{X \leq b\}$ ΚΑΙ $\{X > b\}$ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ

ΚΑΙ Η ΕΝΩΣΗ ΤΟΥΣ ΕΙΝΑΙ Ω).

$\Rightarrow P(a < X \leq b) = 1 - F(a) - [1 - F(b)]$

$= F(b) - F(a)$

ΖΕΥΓΟΣ Τ.Μ.

ΑΝΤΙ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΜΙΑ Τ.Μ. ΕΧΟΥΜΕ ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΟ Τ.Μ. (X, Y). ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ (X, Y) ΩΣ:

$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ΜΕ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

$f(x, y) \geq 0$ ΚΑΙ $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1$.

ΠΑΡ.

X \ Y:	1	2	3	4	5	6
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
2	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

$\underbrace{P(X = 1, Y = 3)}_{= f(1,3)} = 1/12$, $\underbrace{P(X = 2, Y = 5)}_{= f(2,5)} = 1/12$,

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΟΛΑ ΤΑ $f(x_i, y_j) = 1/12 > 0$

$(P(X = 1, Y = 3) = f(x_1, y_3)$, $P(X = 2, Y = 5) = f(x_2, y_5))$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ $f(1,1)+f(1,2)+\dots+f(1,6)$

$+f(2,1)+f(2,2)+\dots+f(2,6)$

$= 12\left(\frac{1}{12}\right)=1$

ΣΥΝΕΠΩΣ ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ $\longrightarrow$

f ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ

(ΔΗΛΑΔΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ)

ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$f_1(x_i)=\sum_{j=1}^{m} f(x_i,y_j)=\sum_{j=1}^{m} P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$f_2(x_i)=\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i,Y=y_j)$$

ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $\sum_{i=1}^{m} f_1(x_i)=\sum_{j=1}^{m} f_2(y_j)$

$$=\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)=1$$

ΓΙΑ ΠΑΡ.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$f_1(x_i)$
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	$1/2 = f_1(1)$
2	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	$1/2 = f_1(2)$
$f_2(y_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	$1 = \sum_i\sum_j f(x_i,y_j)$

$\parallel f_2(1)$ $\parallel f_2(2)$ $\parallel f_2(3)$ 6 - - -

$\sum_{i=1}^{2} f_1(x_i)=1$ ΚΑΙ $\sum_{j=1}^{6} f_2(y_j)=1$ =

⑨

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

$f(x,y) = f(x|y) \cdot f_2(y) = f(y|x) \cdot f_1(x)$

ΚΑΙ $f(x|y) = P(X=x \mid Y=y) \leftrightarrow$ ΥΠΟ_ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

ΟΠΟΥ $\{X=x\}$ = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

$\{Y=y\}$ = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ Τ.Μ

ΑΝ ΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ $\{X=x\}$ ΚΑΙ $\{Y=y\}$ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΤΙΜΗ ΤΩΝ Χ ΚΑΙ Υ ΤΟΤΕ Χ ΚΑΙ Υ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ. ΔΗΛΑΔΗ ΓΙΑ $f_1(x) \neq 0$ ΚΑΙ $f_2(y) \neq 0$, $f(x|y) = f_1(x)$ ΚΑΙ $f(y|x) = f_2(y)$. ΣΥΝΕΠΩΣ $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Ο ΤΥΠΟΣ ΑΥΤΟΣ ΙΣΧΥΕΙ ΣΤΟ ΠΑΡ. ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ Χ ΚΑΙ Υ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ.

$\Big(f(1,1) = \frac{1}{12} = \underbrace{f_1(1)}_{1/2} \cdot \underbrace{f_2(1)}_{1/6}$, $f(1,2) = \frac{1}{12} = \underbrace{f_1(1)}_{1/2} \cdot \underbrace{f_2(2)}_{1/6}$

ΚΛΠ---$\Big) \rightarrow$ ΤΟ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ Χ, Υ.