1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑΣ)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΝΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΥΧΑΙΟ ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟ ΝΑ ΠΡΟΒΛΕΦΘΕΙ ΜΕ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΚΑΘΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΙΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΤΟΥ.

ΠΑΡ ΤΥΧΑΙΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΤΗΝ ΡΙΨΗ ΚΕΡΜΑΤΟΣ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΔΗΛΑΔΗ "ΚΟΡΩΝΑ" Ή "ΓΡΑΜΜΑΤΑ", ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ. ΥΠΑΡΧΕΙ Η ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΝΑ ΕΜΦΑΝΙΣΤΕΙ (Ή ΟΧΙ) ΣΕ ΚΑΘΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΡΙΨΗΣ ΚΕΡΜΑΤΟΣ (ΠΕΙΡΑΜΑ) ΟΤΑΝ Η ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΑΥΤΗ ΓΙΝΕΤΑΙ ΥΠΟ ΤΙΣ ΙΔΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

Η ΡΙΨΗ ΚΕΡΜΑΤΟΣ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ.

ΑΛΛΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ: ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ ΚΑΠΟΙΑ ΜΕΡΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΚΛΙΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΚΑΠΟΙΑ ΠΟΛΗ ΚΑΠΟΙΑ ΜΕΡΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ, ΚΛΠ...

②

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ:

ΕΝΑ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ ΕΧΕΙ ΩΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ n ΤΥΧΑΙΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΑΥΤΩΝ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ Ω.

ΠΑΡ. ΓΙΑ ΡΙΨΗ ΚΕΡΜΑΤΟΣ $\Omega = \{K, \Gamma\}$

ΓΙΑ ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ΓΙΑ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΡΙΨΗ 2 ΚΕΡΜΑΤΩΝ:

1^o ΚΕΡΜΑ $\Rightarrow \Omega_1 = \{K, \Gamma\}$

2^o ΚΕΡΜΑ $\rightarrow \Omega_2 = \{K, \Gamma\}$

$$\Rightarrow \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\}$$

$$= \{(x_1, x_2) / x_1 \in \Omega_1, x_2 \in \Omega_2\}$$

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ Ή ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΟΣ (ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΟΣ)

ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΜΕ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ, ΔΗΛΑΔΗ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ---, \omega_n\}$

③

ΑΠΛΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ :

ΠΑΡ : ΣΤΗΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΡΙΨΗ 2 ΖΑΡΙΩΝ ΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

$E_1 = \{(5,2)\}$ = ΑΠΛΟ

ΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

$E_2 = \{(\omega_1, \omega_2) / \omega_1 + \omega_2 = 6\}$ = ΣΥΝΘΕΤΟ

ΔΙΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ > 1 ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ω_1, ω_2

Π.Χ. $\omega_1 = 3 = \omega_2$, $\omega_1 = 2$ ΚΑΙ $\omega_2 = 4$, $\omega_1 = 1$ ΚΑΙ $\omega_2 = 5$.

- ΒΕΒΑΙΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ : ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ

  ΠΑΡ. $E_3 = \{(\omega_1, \omega_2) / \omega_1 + \omega_2 \leq 12\}$

- ΑΔΥΝΑΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ : ΔΕΝ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΠΟΤΕ.

  ΠΑΡ. $E_4 = \{(\omega_1, \omega_2) / \omega_1 + \omega_2 = 15\}$

4

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

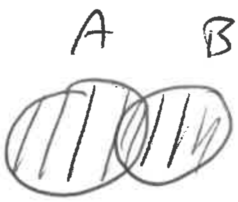
ΕΣΤΩ Ω = ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

ΚΑΙ $\Omega = \{A, B\}$

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- ΕΝΩΣΗ

$\Gamma = A \cup B \rightarrow$ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ Α Ή Β Ή ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ



$A \cup B$

ΙΣΧΥΕΙ: $A \cup B = B \cup A$

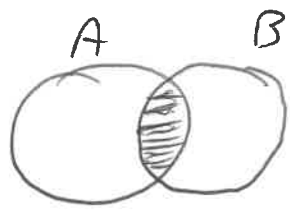
ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ ΤΡΙΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ C

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- ΤΟΜΗ

$\Gamma = A \cap B \rightarrow$ Α ΚΑΙ Β ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ.

ΙΣΧΥΕΙ $A \cap B = B \cap A$



ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ ΤΡΙΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ C

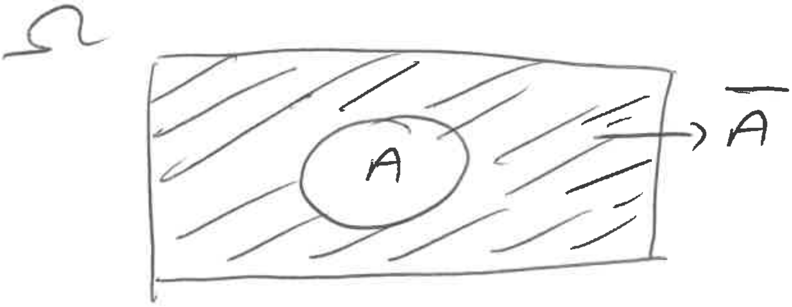
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ΚΑΙ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5)

. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟΥ A : ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΟΛΑ ΤΑ ΑΠΛΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΤΟ A → ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ $\bar{A}$.



• ΞΕΝΑ Ή ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ : ΑΝ ΤΑ 2 ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ $A \subset \Omega$ ΚΑΙ $B \subset \Omega$ ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΣ ΤΟΤΕ $A \cap B = \emptyset$ (ΣΥΝΟΛΟ ΚΕΝΟ)

* ΣΗΜΕΙΩΣΗ : $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

ΠΑΡ: ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ

$A = \{1,3,5\}$, $B = \bar{A} = \{2,4,6\}$

$\Delta = \{4,6\}$, $Z = \{2\}$

ΤΟΤΕ $A \cap B = A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cap \Delta = \emptyset$,

$B \cap Z = \{2\} = Z$, $B \cup Z = \{2,4,6\} = B$,

$A \cup B = A \cup \bar{A} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

$$A \cap (B \cup \Delta) = \underbrace{\{1,3,5\}}_{A} \cap \underbrace{[\{2,4,6\} \cup \{4,6\}]}_{\{2,4,6\} = \bar{A}} = \emptyset$$

ΕΠΙΣΗΣ, ΑΠΟ $A\cap(B\cup\Delta) = \underbrace{(A\cap B)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(A\cap\Delta)}_{\emptyset} = \emptyset$

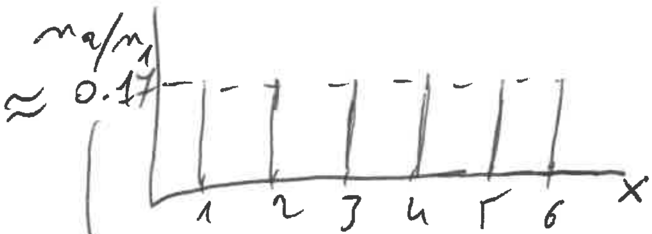
ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΥΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑ n_1 ΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ Ε ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ n_2 ΦΟΡΕΣ ($n_2 \le n_1$), Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ Ε ΕΙΝΑΙ n_2/n_1

ΠΑΡ: ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ 10 ΦΟΡΕΣ $\Rightarrow n_1 = 10$

X (ΠΛΕΥΡΑ ΖΑΡΙΟΥ) :	1	2	3	4	5	6
ΣΥΧΝ (n_2) :	1	1	2	2	1	3
ΣΧΕΤ. ΣΥΧΝ :	1/10 = 0.1	1/10 0.1	2/10 0.2	2/10 0.2	1/10 0.1	3/10 0.3

ΣΤΙΣ "ΑΠΕΙΡΕΣ" ΡΙΨΕΙΣ ΖΑΡΙΟΥ



ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

ΟΤΑΝ ΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ "ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ" ΑΥΞΗΘΟΥΝ ΤΟΤΕ Η ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΕΙΝΕΙ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

7

ΟΡΙΣΜΟΣ: ΕΣΤΩ Ε ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)}$

$N(E)$ = ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΥΝΟΙΚΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

$N(\Omega)$ = ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

ΠΑΡ: ΓΙΑ ΖΑΡΙ (ΚΑΝΟΝΙΚΟ)

$N(\Omega) = 6$ (= ΑΡΙΘ. ΠΛΕΥΡΩΝ)

ΚΑΙ $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

ΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ $E = \{2, 3, 6\}$

$\rightarrow N(E) = 3$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ Ε

$= P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

= ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΕ ΡΙΨΗ ΖΑΡΙΟΥ ΝΑ ΕΜΦΑΝΙΣΤΕΙ ΠΛΕΥΡΑ 2, Ή 3, Ή 6.

ΚΑΙ $0 \leq P(E) \leq 1$

0: ΑΔΥΝΑΤΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

1: ΒΕΒΑΙΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ

P ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΟΡΙΣΤΕΙ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ: $P: E \rightarrow \mathbb{R}$

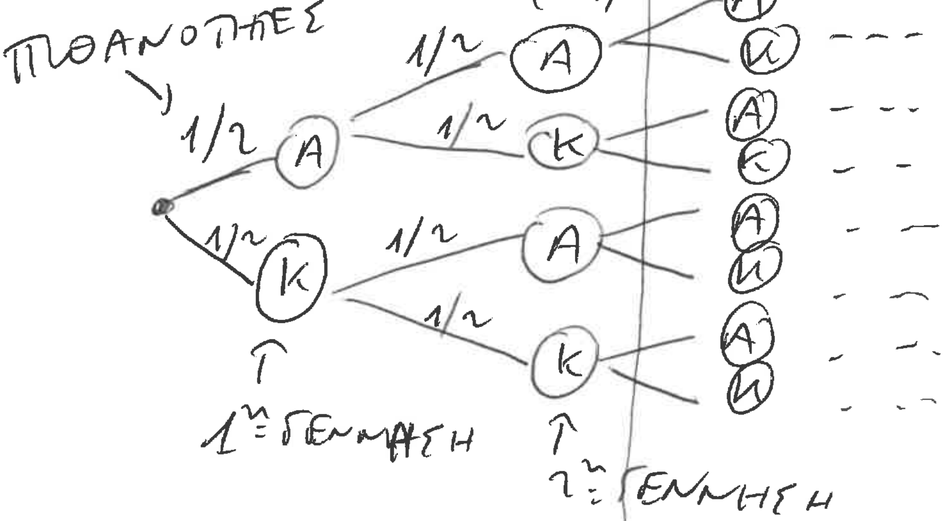
ΓΙΑ $\forall A \in E$: $P(A) \geq 0$

$P(\Omega) = 1$

• ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

– ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΠΑΡ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗ ΑΓΟΡΙΟΥ (Α) Ή ΚΟΡΙΤΣΙΟΥ (Κ)



ΓΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΜΕ 2 ΠΑΙΔΙΑ

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ Ω = (1ης ΚΑΙ 2ης ΓΕΝΝΗΣΗ)

= {(Α,Α), (Α,Κ), (Κ,Α), (Κ,Κ)}

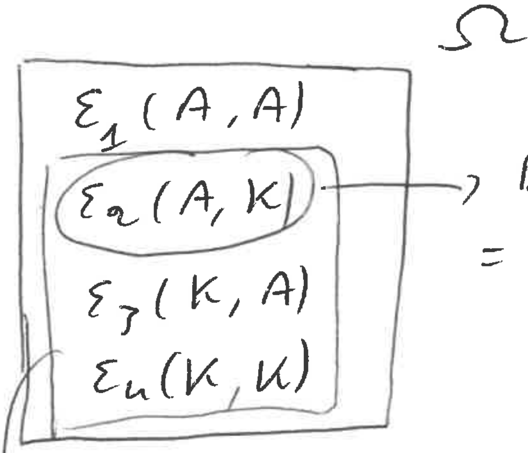
$P(A,K) = \frac{1 \rightarrow N(E)}{4 \rightarrow N(\Omega)}$ = ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΤΟ 1ο ΠΑΙΔΙ = Α ΚΑΙ ΤΟ 2ο = Κ

ΣΤΟ ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΥΤΟ ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΩΣ ΕΝΑ ΚΛΑΔΙ ΣΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ.

ΑΝ ΖΗΤΟΥΣΑΜΕ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ Κ $\Rightarrow$ ΕΧΟΥΜΕ ΤΡΙΑ ΚΛΑΔΙΑ ΣΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ $\Rightarrow$ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ = 3/4.

9

- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ VENN



→ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟ 1ο ΠΑΙΔΙ = ΑΓΟΡΙ ΚΑΙ ΤΟ 2ο ΚΟΡΙΤΣΙ (= ΕΝΑ ΣΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ)

→ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΕΝΑ ΚΟΡΙΤΣΙ (= ΤΡΙΑ ΣΤΑ ΤΕΣΣΕΡΑ)

ΕΣΤΩ Ε ΑΥΤΟ, ΒΛΕΠΟΥΜΕ $E \subset \Omega$
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ (Ή ΥΠΟ-ΣΥΝΘΗΚΗ) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ. ΕΣΤΩ ΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ A_1 ΚΑΙ A_2, ΤΟΤΕ ΑΥΤΗ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΩΣ

$P(A_2 | A_1)$ = ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΣΥΜΒΕΙ A_2 ΕΦΟΣΟΝ ΣΥΝΕΒΗ A_1

(Ή $P(A_1 / A_2)$ = ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΣΥΜΒΕΙ A_1 ΕΦΟΣΟΝ ΣΥΝΕΒΗ A_2)

10

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ ΤΡΑΠΟΥΛΑ 52 ΦΥΛΛΩΝ. ΠΟΙΑ Η ΠΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΝ ΤΡΑΒΗΞΟΥΜΕ 2 ΦΥΛΛΑ ΤΟ 2ο ΟΧΙ ΦΙΓΟΥΡΑ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΟΤΙ ΤΟ 1ο ΟΧΙ ΦΙΓΟΥΡΑ;

ΕΣΤΩ: A_1 = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟ 1ο ΟΧΙ ΦΙΓΟΥΡΑ

A_2 = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟ 2ο ΟΧΙ ΦΙΓΟΥΡΑ

$P(A_1) = \frac{40}{52}$ (ΕΧΟΥΜΕ 12 ΦΙΓΟΥΡΕΣ)

40 = ΑΡΙΘ. ΕΥΝΟΙΚΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

52 = ΑΡΙΘ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

ΑΦΟΥ ΤΡΑΒΗΞΑΜΕ ΤΟ 1ο Η ΠΘΑΝΟΤΗΤΑ ΤΟ 2ο ΟΧΙ ΦΙΓΟΥΡΑ $= P(A_2|A_1) = \frac{39}{51}$.

Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΕΙΝΑΙ

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1|A_2)$$

ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΠΘΑΝΟΤΗΚΑ ΚΑΝΕΝΑ ΝΑ ΜΗΝ ΕΙΝΑΙ ΦΙΓΟΥΡΑ;

ΕΔΩ ΖΗΤΑΜΕ $P(A_1 \cap A_2)$ ΔΗΛΑΔΗ

$$P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \left(\frac{40}{52}\right) \cdot \left(\frac{39}{51}\right) = 0.588$$

11 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΣΤΩ ΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ A_1, A_2 ΚΑΙ $P(A_1) \neq 0$, $P(A_2) \neq 0$.

A_1 ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ A_2 ΟΤΑΝ

$P(A_1 | A_2) = P(A_1)$ (ΚΑΙ $P(A_2 | A_1) = P(A_2)$)

ΔΗΛΑΔΗ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΕΝΟΣ ΔΕΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΙ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ.

ΣΥΝΕΠΩΣ: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ ΚΑΙ ΣΕ >1 ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ.

ΠΑΡ: ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡ. ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ 2ου ΦΥΛΛΟΥ ΓΙΝΕΙ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΠΑΝΑΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΤΗΝ ΤΡΑΠΟΥΛΑ ΤΟΥ 1ου ΦΥΛΛΟΥ, ΠΩΣ ΘΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΝΤΑΝ Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ;

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ A_1 ΚΑΙ A_2 ΘΑ ΗΤΑΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

$$= \left(\frac{40}{52}\right) \cdot \left(\frac{40}{52}\right) = \left(\frac{40}{52}\right)^2 = 0.5917$$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΔΙΑΦΕΡΕΙ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ.

ΝΑ ΣΗΜΕΙΩΣΟΥΜΕ ΟΤΙ ΣΤΟ ΠΑΡ. ΤΩΝ ΔΥΟ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ (ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ) Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ Π.Χ. (Α, Κ) ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟ ΚΑΝΟΝΑ ΜΕ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΑΦΟΥ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΤΟ 1ο ΠΑΙΔΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Α ΕΙΝΑΙ 1/2 ΚΑΙ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΤΟ 2ο ΠΑΙΔΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ Κ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΟΤΙ ΤΟ 1ο ΗΤΑΝ Α ΕΙΝΑΙ ΕΠΙΣΗΣ 1/2, ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- ΑΝ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ΤΟΤΕ ΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ A_1 ΚΑΙ A_2 ΕΙΝΑΙ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ (ΤΟ ΕΧΟΥΜΕ ΑΝΑΦΕΡΕΙ ΣΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ). ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $P(A_1 \cap A_2) = 0$ (ΤΑ A_1 ΚΑΙ A_2 ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΟΥΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ). ΕΠΙΠΛΕΟΝ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

- $P(\emptyset) = 0$

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
  ($\to P(A_1 \cup A_2) \le P(A_1) + P(A_2) \leftrightarrow$ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BOOLE)
- ΑΝ $A_1 \subseteq A_2$ ΤΟΤΕ $P(A_1) \le P(A_2)$

(ΓΙΑΤΙ $P(\emptyset) = 0$; ΔΙΟΤΙ ΕΣΤΩ $A = \emptyset$
ΤΟΤΕ $\bar{A} = \Omega$. ΟΜΩΣ
$P(\Omega) = P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A)$
ΑΦΟΥ Α ΚΑΙ $\bar{A}$ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ

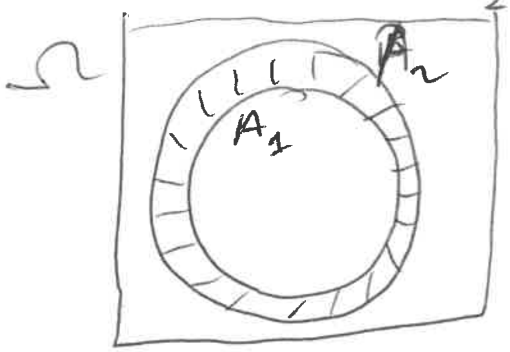
$$\Leftrightarrow \underbrace{P(\Omega)}_{1} = P(\bar{A}) + P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\Omega) = 0$$

ΚΑΙ $A = \emptyset$)

(ΓΙΑΤΙ ΑΝ $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \le P(A_2)$;



$$A_2 = A_1 \cup (\underbrace{A_2 \cap \bar{A}_1}_{\text{ΕΠΙΣΚΙΑΣΜΕΝΟ}})$$

ΚΑΙ $A_1 \cap (A_2 \cap \bar{A}_1) = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1) \geq P(A_1))$$

* ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η ΣΧΕΣΗ $P(A_1 \cup A_2)$ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ ΚΑΙ ΓΙΑ >2 ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ. ΓΙΑ ΠΑΡ. ΑΝ ΕΧΟΥΜΕ 3 ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ A_1, A_2, A_3,

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}}$$

(ΑΝ A_1, A_2, A_3 ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$)

* ΣΗΜΕΙΩΣΗ (ΠΡΟΣΟΧΗ)

- ΑΝ A_1 ΚΑΙ A_2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΤΟΤΕ ΕΙΝΑΙ ΣΥΒΙΒΑΣΤΑ (ΔΗΛΑΔΗ ΟΧΙ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ)
- ΙΔΙΩΣ: ΑΝ A_1 ΚΑΙ A_2 ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ ΤΟΤΕ ΕΙΝΑΙ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ (ΟΧΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ)

(ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ)

(15)

ΠΑΡ: ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΕΡΘΕΙ ~~Η~~ ΠΛΕΥΡΑ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟ "4" ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 1 ΦΟΡΑ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΡΙΨΕΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΖΑΡΙΟΥ;

ΕΣΤΩ A_1 = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΝΑ ΕΡΘΕΙ "4" ΚΑΤΑ ΤΗΝ $1^{η}$ ΡΙΨΗ

A_2 = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ - ——— - — $2^{η}$ ΡΙΨΗ

$A_1 \cup A_2$ = ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ ΝΑ ΕΡΘΕΙ "4" ΣΤΗΝ $1^{η}$ ΡΙΨΗ, Ή ΣΤΗΝ $2^{η}$ ΡΙΨΗ, Ή ΚΑΙ ΣΤΙΣ 2 ΡΙΨΕΙΣ.

⇒ ΖΗΤΑΜΕ $P(A_1 \cup A_2)$

A_1 ΚΑΙ A_2 = ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ → ΟΧΙ ΑΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑ $(P(A_1 \cap A_2) \neq 0)$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

ΑΦΟΥ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

$$\rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{11}{36}$$