



# Τεχνική PERT και μέθοδος CPM

19 Δεκεμβρίου 2017

# Εισαγωγή (1)

- Υπάρχουν πολλές σύνθετες δραστηριότητες, οι οποίες απαιτούν την εκτέλεση πολλών άλλων επιμέρους δραστηριοτήτων, προκειμένου να ολοκληρωθούν. Η ολοκλήρωση κάποιων από τις επιμέρους δραστηριότητες ενδέχεται να παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην ολοκλήρωση της σύνθετης δραστηριότητας, ειδικά όταν η έναρξη κάποιων δραστηριοτήτων πρέπει να έπεται της λήξης κάποιων άλλων.
- Με την προϋπόθεση ότι υπάρχει δεσμευτική προθεσμία για την ολοκλήρωση μιας σύνθετης δραστηριότητας και με δεδομένη την πολυπλοκότητά της, (που εξαρτάται από το πλήθος των επιμέρους δραστηριοτήτων), το έργο της παρακολούθησης της εξέλιξης της διαδικασίας καθώς και των διορθωτικών παρεμβάσεων επί αυτής καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο.

# Εισαγωγή (2)

3

- ▶ Παραδείγματα σύνθετων δραστηριοτήτων, οι οποίες είναι ιδιαίτερα δύσκολο να ελεγχτούν, είναι:
  - ❑ Κατασκευή μεγάλων τεχνικών έργων (αυτοκινητόδρομοι, λιμάνια, μεγάλα κτίρια)
  - ❑ Παραγωγή ενός σύνθετου προϊόντος (πλοίο, αυτοκίνητο)
  - ❑ Συντήρηση σύνθετου μηχανολογικού εξοπλισμού
  - ❑ Σχεδιασμός και εγκατάσταση νέων συστημάτων.
- ▶ Το υπεύθυνο στέλεχος του οργανισμού που εποπτεύει την σύνθετη δραστηριότητα-έργο ονομάζεται **Project manager** (Διαχειριστής έργου).
- ▶ Αρωγοί στο δύσκολο έργο του Project manager είναι η **τεχνική PERT** και η **μέθοδος CPM**.

# Εισαγωγή (3)

4

- Το 1918 ο Henry L. Gantt χρησιμοποίησε τα ομώνυμα διαγράμματα (**Gantt**) προκειμένου να διευκολυνθεί στον προγραμματισμό εργασιών σε μια γραμμή παραγωγής. Τα διαγράμματα Gantt είναι η πρώτη περίπτωση εφαρμογής μεθόδου για τον προγραμματισμό έργου.
- Η τεχνική PERT αναπτύχθηκε από το Πολεμικό Ναυτικό των ΗΠΑ, ενώ η μέθοδος CPM αναπτύχθηκε από τις εταιρείες DuPont και Remington. Ο σκοπός τους ήταν να συντονίσουν διαφορετικού τύπου έργα.
- Οι σύγχρονες εφαρμογές προγραμματισμού έργων συνδυάζουν τα βασικά σημεία και των δύο παραπάνω μεθόδων.

# Εισαγωγή (4)

5

- **Τεχνική PERT:** Τεχνική αξιολόγησης και αναθεώρησης προγράμματος (Program Evaluation and Review Technique).
- **Μέθοδος CPM:** Μέθοδος κρίσιμης διαδρομής (μονοπατιού) (Critical Path Method).
- Ο Project Manager πρέπει να ξεπεράσει τις δυσκολίες που συνεπάγεται η αλληλεξάρτηση των διαφόρων δραστηριοτήτων του έργου και να εξασφαλίσει την έγκαιρη ολοκλήρωση του έργου, δίνοντας απαντήσεις σε ερωτήματα, όπως:
  - ❑ Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου;
  - ❑ Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος έναρξης και λήξης κάθε διαδικασίας του έργου;
  - ❑ Ποιες είναι οι κρίσιμες διαδικασίες, από την ολοκλήρωση των οποίων εξαρτάται η επιτυχής ολοκλήρωση του όλου έργου;
  - ❑ Ποια είναι η χρονική ανοχή για τις μη κρίσιμες διαδικασίες, ώστε αυτές να μην επηρεάσουν την έγκαιρη ολοκλήρωση του έργου;

## Εισαγωγή (5)

6

- ▶ Η τεχνική PERT πρώτο-εφαρμόστηκε για την κατασκευή των υποβρυχίων πυρηνικών πυραύλων Polaris (τέλη δεκαετίας 1950) και επειδή το εγχείρημα ήταν καινοτόμο, υπήρχε αβεβαιότητα ως προς τον υπολογισμό του χρόνου εκτέλεσης των διάφορων διαδικασιών του έργου. Έτσι, η συγκεκριμένη τεχνική έπρεπε να **είναι ικανή να διαχειριστεί την εν λόγω αβεβαιότητα και έτσι ακριβώς σχεδιάστηκε.**
- ▶ Από την άλλη μεριά, η μέθοδος CPM, αναπτύχθηκε για την διαχείριση έργων βιομηχανικού χαρακτήρα, όπου υπήρχε η δυνατότητα υπολογισμού του χρόνου εκτέλεσης των επιμέρους διαδικασιών.

## Εισαγωγή (6)

- Οι δύο μέθοδοι – τεχνικές βασικά έχουν τον ίδιο στόχο: την έγκαιρη ολοκλήρωση ενός σύνθετου έργου.
- Χρησιμοποιούν παρεμφερή ορολογία, αν και αναπτύχθηκαν ανεξάρτητα.
- Ειδικότερα, η μέθοδος CPM προσανατολίζεται στην μείωση του χρόνου εκτέλεσης με ενδεχόμενη αύξηση, ίσως, του εργατικού δυναμικού ως αντιστάθμισμα. Αποτελεί δηλαδή ένα trade-off μεταξύ χρόνου εκτέλεσης και κόστους για κάθε δραστηριότητα, επιχειρώντας την εύρεση του ιδανικού σημείου.

# Εισαγωγή (7)

- Στις ημέρες μας υπάρχουν ψηφιοποιημένες εφαρμογές (εργαλεία) που υποστηρίζουν τον Project manager στο έργο του, συνδυάζοντας τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων. Η πρακτική αυτή καθιστά πλέον δυσδιάκριτες τις διαφορές των δύο μεθόδων.
- Στο εξής, θα αναφερόμαστε σε αυτές τις μεθόδους (ελέγχου ολοκλήρωσης έργου) με την ενιαία ορολογία : **μέθοδος PERT/CPM.**



# Απαντήσεις που μας παρέχει η Μέθοδος PERT/CPM

9

- Με τη βοήθεια των PERT/CPM μπορούν να απαντηθούν όλες οι εύλογες ερωτήσεις για την υλοποίηση ενός έργου όπως:
  - Ποιος είναι ο χρόνος υλοποίησης του έργου;
  - Πόσο σύντομα μπορεί να υλοποιηθεί το έργο; □
  - Ποιες πρέπει να είναι οι προγραμματισμένες ημερομηνίες έναρξης και λήξης της κάθε δραστηριότητας; □
  - Ποιες δραστηριότητες είναι κρίσιμες για την ολοκλήρωση του έργου χωρίς καθυστερήσεις; □
  - Ποια είναι τα περιθώρια καθυστέρησης στις μη κρίσιμες δραστηριότητες;

**Σημείωση:** Επειδή το συγκεκριμένο θέμα αποτελεί αποκλειστικό αντικείμενο άλλου Μαθήματος επιλογής, στην συνέχεια θα αποφύγουμε την επανάληψη και την εξάντληση τετριμμένων και απλών εννοιών, καθώς και ζητημάτων που μελετήθηκαν διεξοδικά στο άλλο Μάθημα επιλογής.

# Βασικά βήματα Μεθόδου PERT/CPM

10

- ▶ Επιμερίζουμε το όλο έργο στις επιμέρους διεργασίες.
- ▶ Αποτυπώνουμε τις διεργασίες (για ανθρώπινη κατανόηση) ως κόμβους (ορθογώνια)
- ▶ Για κάθε διεργασία βρίσκουμε τις προαπαιτούμενες αυτής (χρονικά)
- ▶ Στην αποτύπωση, συνδέουμε με βέλη κάθε ορθογώνιο (διαδικασία) με όλες τις προαπαιτούμενες διαδικασίες (ορθογώνιο).
- ▶ Συνιστάται η χρήση ενός αρχικού κόμβου (start), με διάρκεια εκτέλεσης 0, ο οποίος σηματοδοτεί την εκκίνηση του έργου. Με αυτόν συνδέεται κάθε διαδικασία η οποία δεν έχει άλλη ως προαπαιτούμενη.
- ▶ Επίσης, συνιστάται η χρήση ενός τελικού κόμβου (finish), με διάρκεια εκτέλεσης 0, ο οποίος σηματοδοτεί την περάτωση του έργου. Με αυτόν συνδέονται όλες οι διαδικασίες για τις οποίες δεν υπάρχουν επόμενες.
- ▶ Για κάθε δραστηριότητα υπολογίζουμε τον νωρίτερο χρόνο έναρξης και λήξης της, καθώς και τον βραδύτερο χρόνο έναρξης και λήξης. Επίσης εκτιμούμε την διάρκειά της (χρόνο ολοκλήρωσης). Τα στοιχεία αυτά καταγράφονται στην αναπαράσταση (δίκτυο) που αναφέρθηκε.
- ▶ Σε ένα τέτοιο δίκτυο υποθέτουμε ότι οι διαδικασίες που δεν συνδέονται με βέλη προαπαιτήσεως μπορούν να συμβούν (εκκινήσουν) ταυτόχρονα.

# Βεβαιότητα και αβεβαιότητα διάρκειας διαδικασίας

11

- Η Μέθοδος PERT/CPM μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο όταν είναι γνωστή η διάρκεια κάθε διαδικασίας του έργου, όσο και όταν αυτή εμπεριέχει μια αβεβαιότητα.
- Η αβεβαιότητα συναντάται κυρίως σε έργα καινοτόμα, για τα οποία δεν υπάρχει προηγούμενη εμπειρία.
- Σε περιπτώσεις όπου υπάρχει βεβαιότητα σχετικά με την διάρκεια κάθε διαδικασίας, αλλά κυρίως σε ένα περιβάλλον αβεβαιότητας, υπάρχει πάντα ως ζητούμενο η γνώση για τα περιθώρια καθυστέρησης μιας διαδικασίας, ώστε αυτή να μην επηρεάσει την έγκαιρη περάτωση του έργου, αλλά και ο προσδιορισμός του χρόνου περάτωσης του έργου.
- Σε περιπτώσεις αβεβαιότητας ακολουθούμε την προσέγγιση των τριών σεναρίων:
  - Αισιόδοξο
  - Πλέον πιθανό
  - Απαισιόδοξο
- Η αβεβαιότητα της αναμενόμενης διάρκειας αντιμετωπίζεται με έναν συγκερασμό της διάρκειας και των τριών σεναρίων, από τον οποίο προκύπτει (με βάση την κατανομή Βήτα) η αναμενόμενη διάρκεια κάθε διαδικασίας καθώς και η διακύμανση αυτής.

# Κρίσιμη διαδρομή και συμπίεση χρόνου εκτέλεσης

- Βασική απαίτηση αποτελεί η γνώση της κρίσιμης διαδρομής, δηλαδή ο προσδιορισμός εκείνης της αλληλουχίας εκτέλεσης που αποτελείται από κόμβους-διαδικασίες των οποίων η διαφοροποίηση (επιμήκυνση) του χρόνου εκτέλεσης έχει άμεση επίπτωση στον συνολικό χρόνο περάτωσης του έργου. Υπάρχει περίπτωση να υπάρχουν περισσότερες από μια κρίσιμες διαδρομές.
- Ενδέχεται ο Project Manager να πρέπει να μειώσει τον αρχικά υπολογισμένο χρόνο περάτωσης. Ως αντιστάθμισμα βέβαια θα πρέπει να καταβληθεί το επιπλέον κόστος συμπίεσης (π.χ. για να συντομεύσει μια διαδικασία θα πρέπει να εργαστούν περισσότεροι εργάτες με ανάλογη αύξηση του κόστους).
- Το καίριο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι: «πώς θα επιτευχθεί η απαιτούμενη συμπίεση (ενδεχομένως μέγιστη) με την ελάχιστη αύξηση του επιπλέον κόστους;» Με άλλα λόγια αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης δύο συγκρουόμενων παραγόντων: του χρόνου ολοκλήρωσης και του κόστους ολοκλήρωσης.

# Δυναμικός Προγραμματισμός και PERT/CPM

13

- ➔ Προκειμένου να απαντήσουμε στα ήδη περιγραφέντα ερωτήματα με την μέθοδο PERT/CPM και με την χρήση του δικτύου που αναφέραμε, εν πολλοίς ακολουθούμε μια μέθοδο διάσπασης του αρχικού προβλήματος σε επιμέρους υπό-προβλήματα, τα οποία είναι ευκολότερα στην επίλυσή τους από το αρχικό. Άρα, ακολουθούμε, εξ ορισμού, μέθοδο Δυναμικού Προγραμματισμού.

## Συντομότερος Χρόνος Έναρξης (ES) & Ολοκλήρωσης (EF) μιας δραστηριότητας

14

- Ξεκινήστε ένα **forward** πέρασμα του δικτύου με αρχή τον κόμβο Start.
- Για κάθε δραστηριότητα  $i$ , υπολογίστε:
  - ❑ **Earliest Start Time** =  $\max \{EF(k), \forall k \in P\}$ , όπου  $P$  το σύνολο των δραστηριοτήτων που είναι άμεσα προ-απαιτούμενες = ο μεγαλύτερος χρόνος ολοκλήρωσης των δραστηριοτήτων που είναι άμεσα προαπαιτούμενες.
  - ❑ **Earliest Finish Time** =  $ES + (\text{χρόνος ολοκλήρωσης της } i)$ .
- Ο (ελάχιστος) ΧΡΟΝΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ του έργου ισούται με το μεγαλύτερο εκ των ενωρίτερων χρόνων ολοκλήρωσης των κόμβων (δραστηριοτήτων) οι οποίοι οδηγούν στον κόμβο Finish.

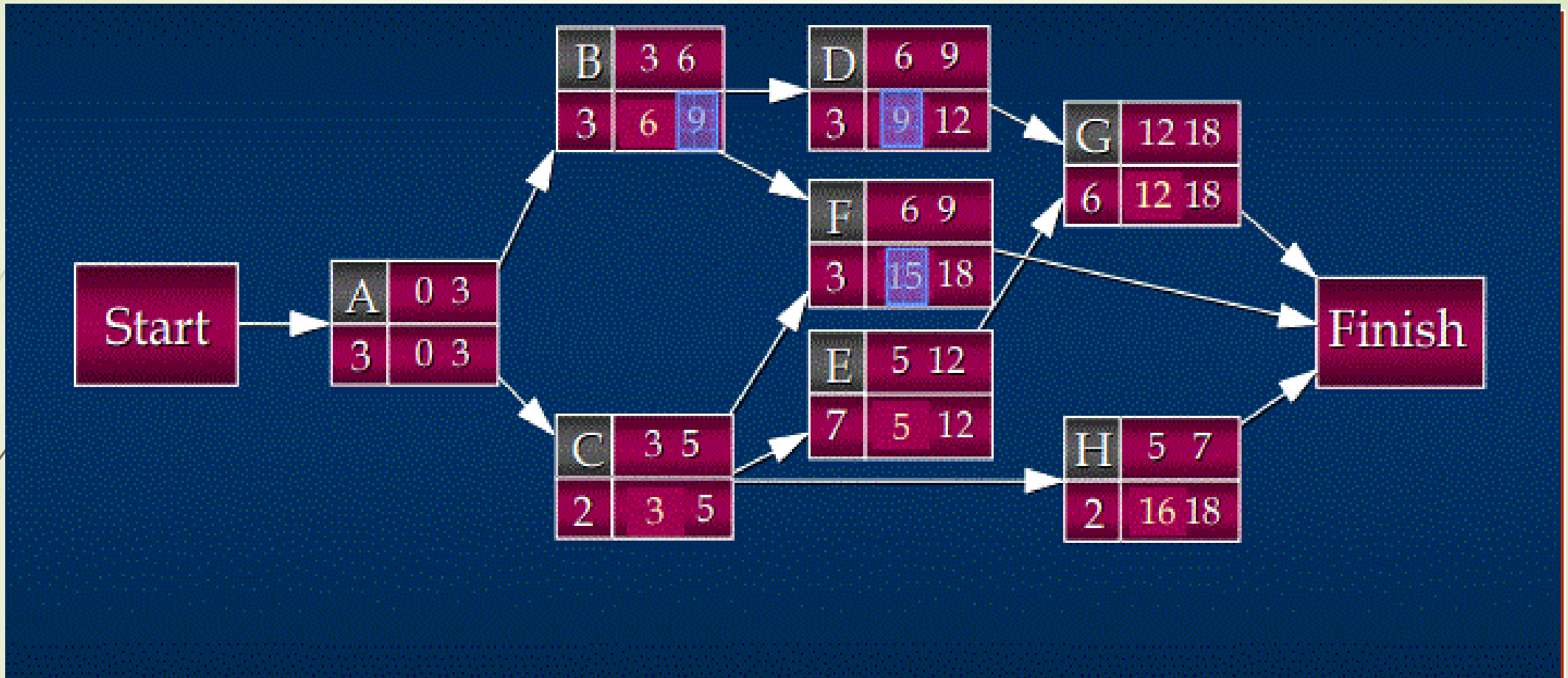
## Βραδύτερος Χρόνος Έναρξης (LS) και Ολοκλήρωσης (LF) μιας δραστηριότητας

15

- Ξεκινήστε ένα **backward** πέρασμα του δικτύου με αρχή τον κόμβο Finish.
- Για κάθε δραστηριότητα  $i$ , υπολογίστε
  - ❑ **Latest Finish Time** =  $\min \{LS(k), \forall k \in S\}$ , όπου  $S$  το σύνολο των δραστηριοτήτων που έπονται της  $i$  και συνδέονται άμεσα μαζί της = ο μικρότερος χρόνος έναρξης των δραστηριοτήτων των οποίων είναι άμεσα προαπαιτούμενη.
  - ❑ **Latest Start Time** =  $LF - (\text{χρόνος ολοκλήρωσης της } i)$ .

# Παράδειγμα δικτύου PERT/CPM

16



Διαδικασία B: LF = το ελάχιστο μεταξύ των ES των διαδικασιών D, F για τις οποίες η B είναι προαπαιτούμενη =  $\min\{9, 15\} = 9$ .



# Καθορισμός κρίσιμης διαδρομής

17

- Υπολογίστε το χρονικό περιθώριο κάθε δραστηριότητας  $i$

$$(\text{Slack})_i = (\text{Latest Start})_i - (\text{Earliest Start})_i ,$$

ή

$$= (\text{Latest Finish})_i - (\text{Earliest Finish})_i .$$

- Η κρίσιμη διαδρομή αποτελείται από τους κόμβους για τους οποίους η παραπάνω διαφορά ισούται με μηδέν.
- Προφανώς για αυτούς τους κόμβους δεν υπάρχει ανοχή στην επιμήκυνση της διάρκειάς τους. Σε αντίθετη περίπτωση, η επιμήκυνση θα επιβραδύνει τον χρόνο περάτωσης του έργου.

# Παράδειγμα καθορισμού κρίσιμης διαδρομής.

<u>Activity</u>	<u>ES</u>	<u>EF</u>	<u>LS</u>	<u>LF</u>	<u>Slack</u>
A	0	3	0	3	0 (crit.)
B	3	6	6	9	3
C	3	5	3	5	0 (crit.)
D	6	9	9	12	3
E	5	12	5	12	0 (crit.)
F	6	9	15	18	9
G	12	18	12	18	0 (crit.)
H	5	7	16	18	11

Το παράδειγμα αναφέρεται στο δίκτυο της διαφάνειας 16.

Κρίσιμη διαδρομή: A- C-E-G. Χρόνος περάτωσης του έργου = 18. Οι δραστηριότητες B, D, F και H έχουν, αντίστοιχα, περιθώριο καθυστέρησης 3, 3, 9 και 11

# Όταν υπάρχει δυνατότητα επιλογής χρόνου εκκίνησης

19

Όπως είδαμε, για τις διαδικασίες που ανήκουν σε κρίσιμο μονοπάτι, δεν υπάρχει περιθώριο για καθυστερήσεις, εάν θέλουμε να μην επηρεαστεί ο χρόνος περάτωσης του έργου.

- Αντίθετα, για τις διαδικασίες που δεν ανήκουν σε κρίσιμη διαδρομή, υπάρχει ένα «ασφαλές χρονικό παράθυρο» μέσα στα όρια του οποίου μπορεί να εκκινήσει η διαδικασία, χωρίς να επηρεαστεί ο χρόνος περάτωσης του έργου. Έτσι, πρέπει εμείς να αποφασίσουμε πότε θα εκκινήσουμε την συγκεκριμένη διαδικασία (στα πλαίσια βέβαια του παραθύρου).
- Η λήψη της κατάλληλης απόφασης για τον χρόνο εκκίνησης μιας μη κρίσιμης διαδικασίας αποτελεί σημείο-κλειδί και ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στην ανάλυση δικτύου PERT/CPM.

# PERT/CPM και Γραμμικός Προγραμματισμός

20

- Όπως είδαμε, η μελέτη δικτύου PERT/CPM γίνεται με χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού.
- Όμως, υπάρχει η δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα με Γραμμικό Προγραμματισμό.
- Ένα από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου του Γ.Π είναι ότι μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με Η/Υ και με χρήση ενός solver, π.χ. Lingo ή CPLEX.
- Ένα δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι μπορούμε να εισάγουμε επιπλέον περιορισμούς επί των διαδικασιών, με την χρήση κατάλληλων γραμμικών εξισώσεων ή/και ανισώσεων.

# Το αντίστοιχο μοντέλο Γ.Π

- Έστω δίκτυο με  $n$  κόμβους (διαδικασίες). Ακολουθεί το μοντέλο Γ.Π.
- μεταβλητή απόφασης  $x_i$  : η συντομότερη χρονική στιγμή έναρξης (ES) της δραστηριότητας που παριστάνεται από τον κόμβο  $i$ . □
- αντικειμενική συνάρτηση:  $\min x_{\text{FINISH}}$  (ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου εκτέλεσης του έργου). □
- περιορισμοί: η (συντομότερη) χρονική στιγμή έναρξης  $x_i$  μιας δραστηριότητας  $i$  μπορεί να γίνει αφού όλες οι προαπαιτούμενες δραστηριότητες της  $j$  ολοκληρωθούν,

$$\text{δηλαδή : } x_i \geq x_j + t_j .$$

Υπενθυμίζεται ότι μια δραστηριότητα  $j$  ολοκληρώνεται σε χρονική στιγμή ίση με το χρόνο έναρξής της συν το χρόνο που απαιτείται για την υλοποίησή της ( $EF_j = ES_j + t_j$ ).

# Παράδειγμα μοντέλου PERT/CPM με Γ.Π.

22

ACTIV	IMMED PREDEC	COMPL TIME
A		3
B	A	3
C	A	2
D	B	3
E	C	7
F	B, C	3
G	D, E	6
H	C	2
FN	F, G, H	0

- **B:**  $x_B \geq x_A + t_A \Rightarrow -x_A + x_B \geq 3$
- **C:**  $x_C \geq x_A + t_A \Rightarrow -x_A + x_C \geq 3$
- **D:**  $x_D \geq x_B + t_B \Rightarrow -x_B + x_D \geq 3$
- **E:**  $x_E \geq x_C + t_C \Rightarrow -x_C + x_E \geq 2$
- **F:**  $x_F \geq x_B + t_B \Rightarrow -x_B + x_F \geq 3$   
 $x_F \geq x_C + t_C \Rightarrow -x_C + x_F \geq 2$
- **G:**  $x_G \geq x_D + t_D \Rightarrow -x_D + x_G \geq 3$   
 $x_G \geq x_E + t_E \Rightarrow -x_E + x_G \geq 7$
- **H:**  $x_H \geq x_C + t_C \Rightarrow -x_C + x_H \geq 2$
- **FIN:**  $x_{FN} \geq x_F + t_F \Rightarrow -x_F + x_{FN} \geq 3$   
 $x_{FN} \geq x_G + t_G \Rightarrow -x_G + x_{FN} \geq 6$   
 $x_{FN} \geq x_H + t_H \Rightarrow -x_H + x_{FN} \geq 2$

All X's  $\geq 0$

Slide 33

Το παραπάνω παράδειγμα αναφέρεται στην περίπτωση της διαφάνειας 16.

# Επίλυση του Γ.Π μοντέλου PERT/CPM (1)

23

- Μετά την επίλυση του προηγούμενου προβλήματος Γ.Π, θα παρατηρούσαμε ότι:
  - ❑ ο ελάχιστος χρόνος υλοποίησης του έργου είναι 18 ημέρες, όπως και υποδείχτηκε προηγούμενα.
  - ❑ οι συντομότεροι χρόνοι έναρξης των κρίσιμων δραστηριοτήτων ταυτίζονται με αυτές που βρέθηκαν προηγούμενα.
  - ❑ οι συντομότεροι χρόνοι έναρξης των μη κρίσιμων δραστηριοτήτων βρίσκονται μεν μέσα στο παράθυρο χρόνου έναρξής τους αλλά δεν ταυτίζονται κατ' ανάγκη με αυτές που βρέθηκαν προηγούμενα

# Επίλυση του Γ.Π μοντέλου PERT/CPM (2)

24

- **δεν υπάρχει ένδειξη** για το ποιες εκ των δραστηριοτήτων είναι **κρίσιμες**. Μπορούν όμως να βρεθούν εάν επιλυθούν για εκάστη εκ των δραστηριοτήτων  $i$  τα εξής δύο π.γ.π.

$\min x_i$

s.t. {

the constraints given before

$x_{FN} = 18$  }

Και

$\max x_i$

s.t. {

the constraints given before

$x_{FN} = 18$  }



# Επίλυση του Γ.Π μοντέλου PERT/CPM (3)

25

Από τις λύσεις των δύο προηγούμενων προβλημάτων Γ.Π, θα παρατηρούσαμε ότι:

- ❑ για τη δραστηριότητα E η μικρότερη τιμή για την  $x_E$  είναι 5, ενώ η μέγιστη 5. Συνεπώς η δραστηριότητα E πρέπει να ξεκινήσει τη χρονική στιγμή 5 προκειμένου το έργο να ολοκληρωθεί στις 18 ημέρες. Άρα η δραστηριότητα **E είναι κρίσιμη** και ανήκει στην κρίσιμη διαδρομή.
- ❑ για τη δραστηριότητα F η μικρότερη τιμή για την  $x_F$  είναι 6, ενώ η μέγιστη 15. Συνεπώς η δραστηριότητα F μπορεί να ξεκινήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή μεταξύ της 6 και 15 προκειμένου το έργο να ολοκληρωθεί στις 18 ημέρες. **Άρα η F δεν είναι κρίσιμη.**
- ❑ Τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα είναι σύμφωνα με τα συμπεράσματα της λύσης με Δυναμικό Προγραμματισμό.

# Πλεονεκτήματα επίλυσης PERT/CPM με Γ.Π έναντι Δ.Π

26

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι καταλήγουμε στις ίδιες λύσεις με τον Γ.Π, όπως και με τον Δ.Π. Το πλεονέκτημα χρήσης Γ.Π όμως έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να εισάγουμε επιπλέον περιορισμούς, όπως:

- ❑ Πρέπει να υπάρχει ένα κενό μήκους **ακριβώς T** μεταξύ **τέλους της A** (completion time a) και **έναρξης της B**:  $x_A + a + T = x_B$ .
- ❑ Πρέπει να υπάρχει ένα κενό μήκους **ακριβώς T** μεταξύ **τέλους της A** (completion time a) και **τέλους της B** (completion time b):  $x_A + a + T = x_B + b$ .
- ❑ Οι δραστηριότητες A και B πρέπει να **εκκινούν ακριβώς την ίδια ώρα**:  $x_A = x_B$ .
- ❑ Οι δραστηριότητες A και B πρέπει να **εκκινούν στην ακραία περίπτωση την ίδια ώρα**:  $|x_A - x_B| \leq 1$ .

## Οικονομική Διάσταση ενός έργου (1)

➔ **το συνολικό κόστος** υλοποίησης ενός έργου διαμορφώνεται από το άθροισμα δύο επί μέρους στοιχείων κόστους:

του έμμεσου, και

του άμεσου.

## Οικονομική Διάσταση ενός έργου (2)

- ▶ **το έμμεσο κόστος** δεν συνδέεται άμεσα με κάποια συγκεκριμένη δραστηριότητα κι είναι μια γραμμική (συνήθως) συνάρτηση του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου, με αποτέλεσμα να μειώνεται ή να αυξάνεται κατά ένα σταθερό ποσό κάθε φορά που η συνολική του διάρκεια συντομεύεται ή επιμηκύνεται αντίστοιχα κατά μία μονάδα χρόνου.
- ▶ ως **άμεσο κόστος** μιας δραστηριότητας νοείται κάθε στοιχείο κόστους που καταλογίζεται απευθείας πάνω στη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Φυσικά η χρονική διάρκεια ολοκλήρωσης κάθε δραστηριότητας είναι συνάρτηση του άμεσου κόστους εκτέλεσής της, οπότε η δραστηριότητα μπορεί να ολοκληρωθεί και σε μικρότερο χρόνο, εάν διατεθεί σ' αυτή επιπλέον κόστος για την εκτέλεσή της (κι αντίστροφα).

# Οικονομική Διάσταση ενός έργου (3)

29

- Στα πλαίσια της CPM δεχόμαστε ότι υπάρχουν δύο ακραίες τιμές της διάρκειας ολοκλήρωσης της κάθε δραστηριότητας σε σχέση με το άμεσο κόστος που διατίθεται για την υλοποίησή της:

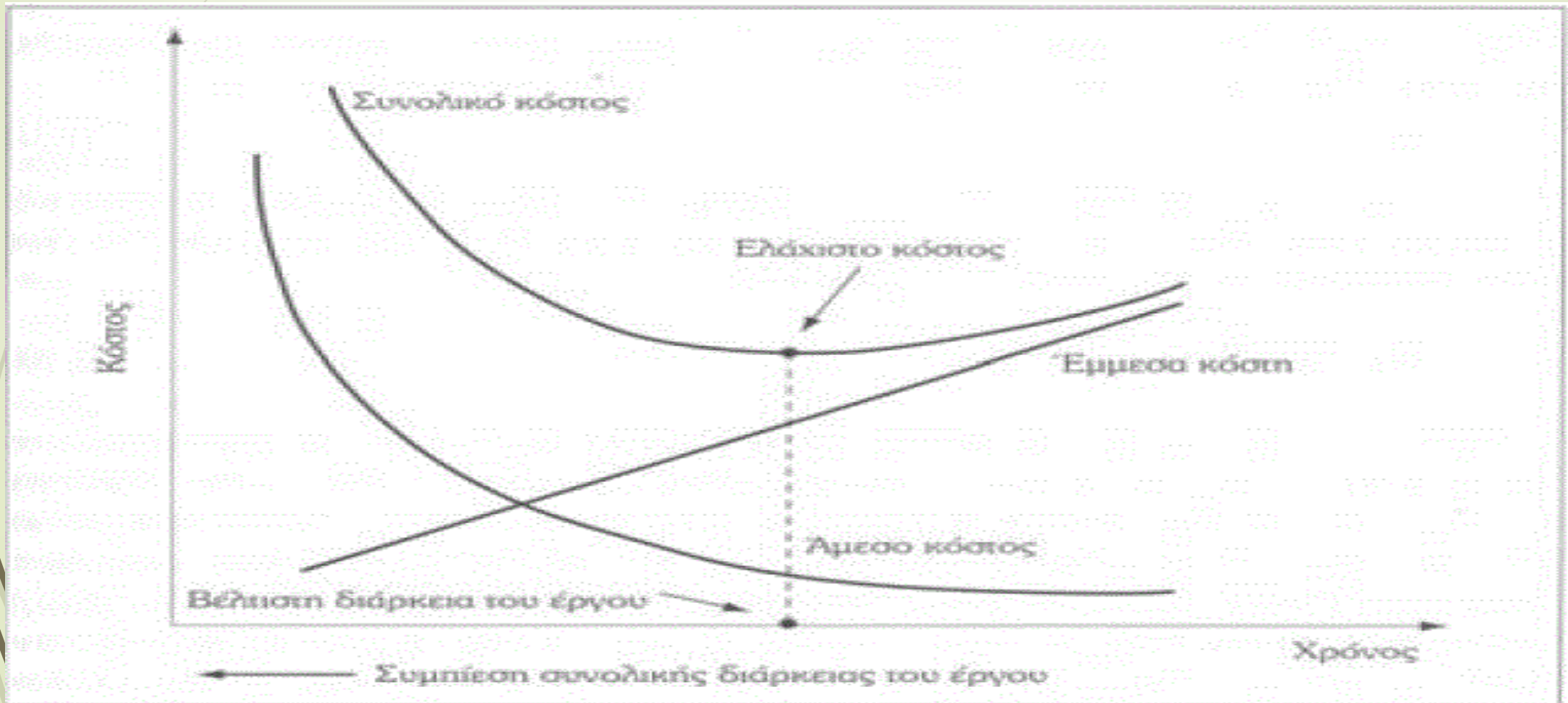
- η **κανονική διάρκεια υλοποίησης** της δραστηριότητας,  $T_N$ , η οποία επιτυγχάνεται όταν διαθέτουμε το (συνηθισμένο) ελάχιστο κόστος της κανονικής της διάρκειας,  $C_N$ ,

- η **συντομότερη διάρκεια** υλοποίησης της δραστηριότητας,  $T_C$ , η οποία επιτυγχάνεται όταν διαθέσουμε το (επιπλέον από το κανονικό) μέγιστο κόστος της συντομότερης διάρκειάς της,  $C_C$ .

# Οικονομική Διάσταση ενός έργου (4)

30

- Η μείωση του χρόνου υλοποίησης των δραστηριοτήτων προκαλεί αύξηση στα άμεσα κόστη και μείωση στα έμμεσα.
- Η συνολική καμπύλη κόστους είναι κυρτή κι έχει βέλτιστο (min).



# Χρονική συμπίεση έργου

31

- Αναφέρεται στην συμπίεση της χρονικής διάρκειας κάποιων από τις κρίσιμες δραστηριότητες έτσι ώστε αυτές να ολοκληρωθούν συντομότερα από ότι ήταν προγραμματισμένο. Το αποτέλεσμα είναι η μείωση εκτέλεσης του χρόνου του έργου.
- Κατά την συμπίεση πρέπει να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα:
  - ❑ Ποιες δραστηριότητες θα συμπιεστούν, για πόσο χρόνο και με ποιο αντίστοιχο κόστος;
  - ❑ Εάν διατίθεται ένα συγκεκριμένο ποσό για την συμπίεση, μέχρι πόσες μονάδες χρόνου μπορούμε να συμπιέσουμε τον χρόνο εκτέλεσης του έργου;

# Αλγόριθμος συμπίεσης έργου (1)

32

Θεωρήστε το επόμενο παράδειγμα:

<u>Activity</u>	<u>Immed. Predec.</u>	<u>Normal Time (Wks)</u>	<u>Crash Time (Wks)</u>	<u>Normal Cost</u>	<u>Crash Cost</u>
A	--	6	4	100	240
B	--	2	1	100	150
C	A	3	3	0	0
D	B	2	2	0	0
E	C	4	2	100	180
F	D	1	1	0	0
G	E,F	1	1	0	0
H	G	6	3	100	160
I	H	3	2	100	140
J	H	1	1	0	0
K	I,J	1	1	0	0



# Αλγόριθμος συμπίεσης έργου (2)

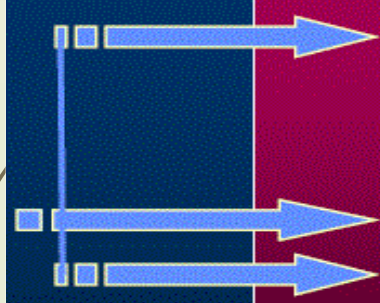
33

- 1ο βήμα: εκτίμηση κανονικών χρόνων και χρόνων συμπίεσης.
- 2ο βήμα: εντοπισμός της κρίσιμης διαδρομής από την PERT/CPM (βασιζόμενοι στους κανονικούς χρόνους).
- 3ο βήμα: επιλογή της κρίσιμης δραστηριότητας με το μικρότερο μοναδιαίο κόστος
- 4ο βήμα: συμπίεση της ανωτέρω δραστηριότητας κατά μία χρονική μονάδα.
- 5ο βήμα: έλεγχος του κριτηρίου τερματισμού. Εάν ικανοποιείται η διαδικασία τελειώνει. Αλλιώς, επιστρέφουμε στο 2ο βήμα και επιλύουμε το δίκτυο του έργου με τη νέα, συντομότερη κατά μία χρονική μονάδα, διάρκεια της συγκεκριμένης δραστηριότητας.

# Αλγόριθμος συμπίεσης έργου (3)

34

<u>Activity</u>	<u>Περιθώριο Συντόμευσης</u>	<u>Πρόσθετο Κόστος</u>	<u>Μοναδιαίο Κόστος</u>
A	2	140	70
B	1	50	50
C			
D			
E	2	80	40
F			
G			
H	3	60	20
I	1	40	40
J			
K			



Το κρίσιμο μονοπάτι είναι το: A-C-E-G-H-I-K. Χρόνος 24 εβδομάδες. Ζητούμενο η συμπίεση σε 19

Οι διαδοχικές συμπίεσεις έχουν ως ακολούθως: H, H, H, E ή I και τέλος I ή E.

Η παραπάνω εφαρμογή του αλγορίθμου συμπίεσης αναφέρεται στην διαφάνεια 32<sup>19/12/2017</sup>

# Μοντελοποίηση της συμπίεσης με Γ.Π.

35

- **μεταβλητή  $x_i$ :** η συντομότερη χρονική στιγμή έναρξης (ES) της δραστηριότητας που παριστάνεται από τον κόμβο  $i$ .
- **μεταβλητή  $y_i$ :** οι χρονικές στιγμές που μπορεί να επισπευστεί η διάρκεια της δραστηριότητας που παριστάνεται από τον κόμβο  $i$ .
- **αντικειμενική συνάρτηση:**  $\min \sum MC_i y_i$  (ελαχιστοποίηση του επιπλέον κόστους –λόγω συμπίεσης- του έργου).
- **περιορισμοί:**
  - η χρονική στιγμή έναρξης  $x_i$  μιας δραστηριότητας  $i$  μπορεί να γίνει αφού όλες οι προαπαιτούμενες δραστηριότητες της  $j$  ολοκληρωθούν, λαμβάνοντας υπόψη την πιθανή συμπίεση τους:  $x_i \geq x_j + t_j - y_j$ .
  - άνω φράγματα για τους χρόνους συμπίεσης.
  - άνω φράγμα για το συνολικό χρόνο υλοποίησης του έργου: (χρόνος ολοκλήρωσης των «τερματικών» δραστηριοτήτων)  $\leq D$ .