Συστήματα αναμονής

19 Ιανουαρίου 2018

Εισαγωγή

Οι ουρές αναμονής συναντώνται σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινότητας. Μπορούμε να πούμε, με μια μικρή δόση φιλοσοφικής διάθεσης, ότι κατά το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα της ζωής μας, περιμένουμε.

- Ως ουρά αναμονής ορίζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο υπάρχει ένα ή περισσότερα σημεία εξυπηρέτησης και ταυτόχρονα ένα σύνολο ατόμων που αναμένουν να εξυπηρετηθούν, δηλαδή να ικανοποιήσουν την απαίτησή τους για την παραλαβή κάποιου προϊόντος ή την λήψη κάποιας υπηρεσίας.
- Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ το σύνολο των σημείων εξυπηρέτησης παραμένει σταθερό, το πλήθος των ατόμων που ζητούν να εξυπηρετηθούν συνεχώς ανανεώνεται.
- Επίσης, είναι δυνατόν ένα σύστημα εξυπηρέτησης να είναι αναποτελεσματικό ή ανεπαρκές, τόσο εξ αιτίας της διακύμανσης του χρόνου εξυπηρέτησης των ατόμων όσο και από το πλήθος των ατόμων που προσέρχονται για εξυπηρέτηση.
- Η μελέτη ενός συστήματος εξυπηρέτησης έχει ως στόχο να καταστήσει το σύστημα λειτουργικό, στην περίπτωση που δεν είναι, ή να μειώσει το συνολικό κόστος εξυπηρέτησης και λειτουργίας του συστήματος.

Τα χαρακτηριστικά του προβλήματος

- **Ζήτηση**: χαρακτηρίζεται από πιθανοτικές ιδιότητες, που αφορούν τόσο στο χρόνο εκδήλωσης ενδιαφέροντος για εξυπηρέτηση, όσο και στον συνολικό χρόνο εξυπηρέτησης.
- Συνήθως, ο χρόνος που περιμένει ένα άτομο για να εξυπηρετηθεί είναι μεγαλύτερος από αυτόν τον ίδιο το χρόνο εξυπηρέτησης. Αυτό οφείλεται τόσο στον τυχαίο τρόπο προσέλευσης ατόμων για εξυπηρέτηση, όσο και στην τυχαία διακύμανση του χρόνου εξυπηρέτησης.
- **Παραδείγματα συστημάτων αναμονής**: Δημόσιες υπηρεσίες, Τράπεζες, καταστήματα, τηλεφωνικά κέντρα, οδικοί σηματοδότες, συνεργεία επισκευών, κ.ά.

Αξιολόγηση συστήματος αναμονής

- Αξιολογούμε την **απόδοση ενός συστήματος** με βάση ορισμένους δείκτες απόδοσης - μέτρα λειτουργικότητας, όπως:
  - Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
  - Ο συνολικός μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα
  - Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά
  - Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα
  - Το ποσοστό απασχόλησης των σημείων εξυπηρέτησης
- Αξιολογούμε την **δυναμικότητα ενός συστήματος** συνήθως με:
  - Το πλήθος των παράλληλων σημείων εξυπηρέτησης
  - Το πλήθος των εξυπηρετούμενων πελατών ανά μονάδα χρόνου (μέσο πλήθος εξυπηρέτησης) που αντιστοιχεί στον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης.

Στόχος της μελέτης ενός συστήματος (1)

- Κάθε σύστημα αναμονής έχει ένα συνολικό προσδοκώμενο (=μέσο) μεταβλητό κόστος λειτουργίας. Αυτό αποτελείται από δύο συνιστώσες κόστους:
  - το κόστος από την **αναμονή των πελατών** στο σύστημα.
  - το κόστος δυναμικότητας από την **παροχή της εξυπηρέτησης**
- Η πρώτη συνιστώσα αναφέρεται στον χρόνο που παραμένει ο πελάτης στο σύστημα προκειμένου να έρθει η σειρά του να εξυπηρετηθεί, καθώς και στον χρόνο εξυπηρέτησης.

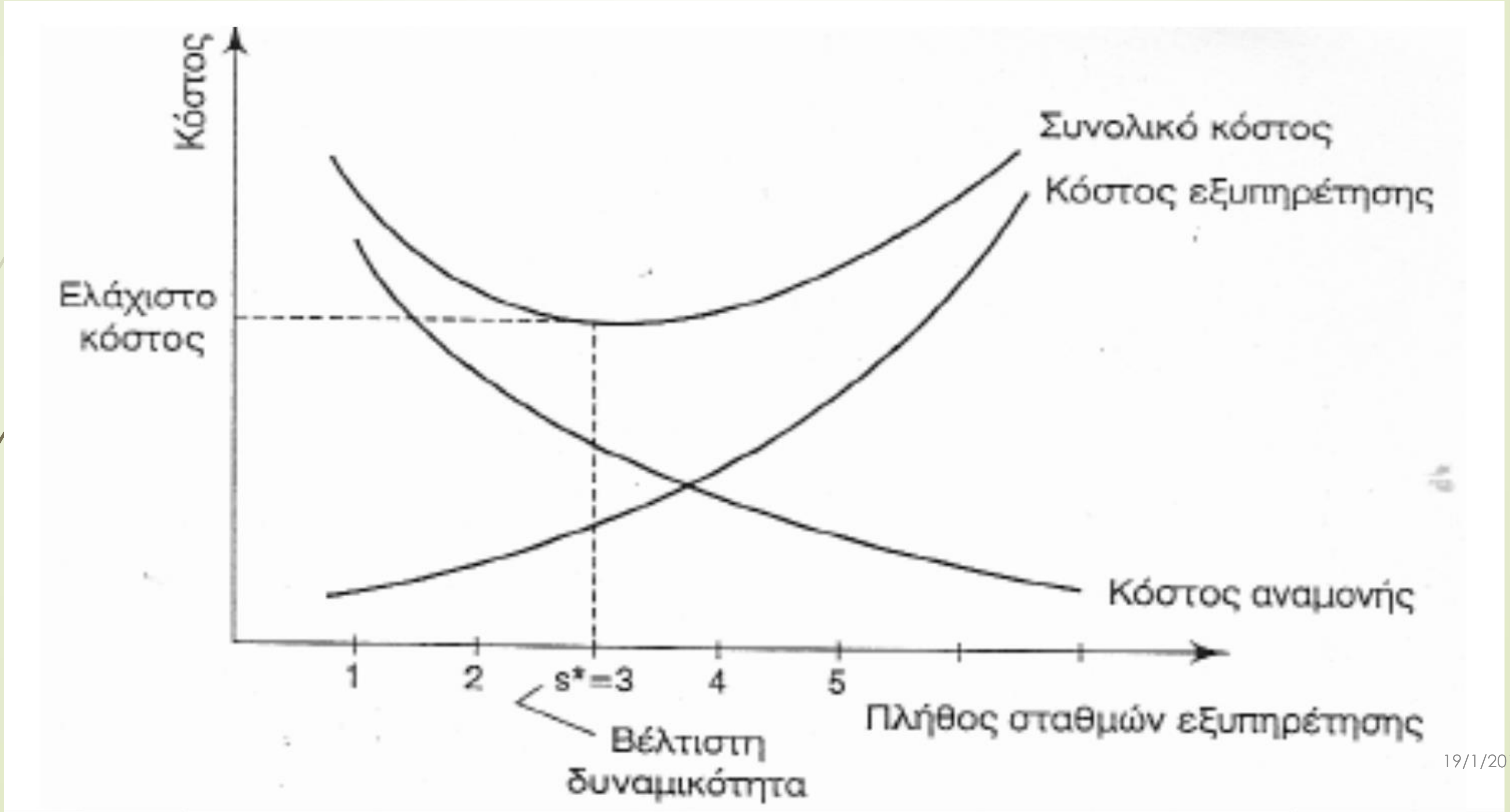
Στόχος της μελέτης ενός συστήματος (2)

- Η δεύτερη συνιστώσα αναφέρεται στο κόστος που συνεπάγονται τα παράλληλα σημεία εξυπηρέτησης (αύξηση των σημείων συνεπάγεται αύξηση κόστους).
- **Οι δύο συνιστώσες είναι ανταγωνιστικές**, δηλαδή η μείωση της μιας συνεπάγεται αύξηση της άλλης.
- Ο στόχος είναι η εύρεση της **«χρυσής τομής»**, δηλαδή ο προσδιορισμός του πλήθους των σημείων εξυπηρέτησης (με το ανάλογο κόστος) ώστε να είναι ρεαλιστικό και υποφερτό το κόστος αναμονής των πελατών.

Στόχος της μελέτης ενός συστήματος (3)

- Σημειώνεται, ότι όταν γίνεται αναφορά στο κόστος αναμονής, ουσιαστικά εννοείται και ο συνολικός χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα. Κατά συνέπεια, αν με *W* έχει συμβολιστεί ο μέσος συνολικός χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, το (μέσο) κόστος από την αναμονή του πελάτη είναι ίσο με ka*W*, *όπου Ka είναι το κόστος αναμονής (συν εξυπηρέτησης) του πελάτη* στη μονάδα του χρόνου. Όμως, η ποσότητα αυτή αναφέρεται σ' ένα μόνο πελάτη και δεν αντικατοπτρίζει το συνολικό κόστος αναμονής των πελατών. Για να υπολογιστεί το συνολικό προσδοκώμενο κόστος αναμονής των πελατών, πολλαπλασιάζεται η ποσότητα αυτή, με το μέσο ρυθμό αφίξεων των πελατών στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή με το λ. Συνεπώς:
- **Αναμενόμενο μέσο κόστος αναμονής πελατών = λKaW**.

Γραφική παράσταση των ανταγωνιστικών συνιστωσών κόστους συστήματος αναμονής



Στοιχεία κατανομών πιθανοτήτων που σχετίζονται με συστήματα αναμονής

Τα χαρακτηριστικά της κατανομής Poisson

Η **κατανομή Poisson χαρακτηρίζεται από το ότι**:

- Η εμφάνιση ενός ενδεχόμενου κατά τη διάρκεια προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος σταθερού πλάτους δεν επηρεάζεται από την εμφάνιση ούτε και επηρεάζει την εμφάνιση κάποιου άλλου ενδεχόμενου. ***(Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα)***
- Η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχόμενου κατά τη διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος π.χ Δt, παραμένει σταθερή για όλα τα διαστήματα πλάτους ίσου με το Δt.
(Τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα σε μικρά διαστήματα ίσου πλάτους)
- Γ. Ένα μόνο ενδεχόμενο είναι δυνατόν να εμφανιστεί κατά την διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος Δt ή , ισοδύναμα, η πιθανότητα να συμβούν πάνω από ένα γεγονότα ταυτόχρονα σε ένα μικρό διάστημα είναι αμελητέα (σχεδόν μηδενική)
(Τα ενδεχόμενα εμφανίζονται μεμονωμένα σε διαστήματα μικρού πλάτους)

Κατανομή Poisson (1)

- **Κατανομή Poisson**: **X~P(λ) (**με X συμβολίζεται η τυχαία μεταβλητή. P(λ) συμβολίζει την κατανομή Poisson.)

Υποθέτουμε ότι σε ένα τηλεφωνικό κέντρο καταμετρούμε τον αριθμό των εισερχόμενων κλήσεων (**συμβάντα**) στο διάστημα 9π.μ. έως 10π.μ. (**πείραμα**). Η **τυχαία μεταβλητή** που αναφέρεται στο μεταβλητό πλήθος των κλήσεων ας είναι **X.** Η μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή **Poisson, ενώ η πιθανότητα: «η μεταβλητή παίρνει την τιμή κ»**, δηλαδή να συμβούν κ συμβάντα (κλήσεις) στο εν λόγω διάστημα, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{P(X=\kappa)=e^{-\lambda}}\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \qquad \kappa = 0,1,2,\ldots$$

και η **μέση τιμή** και η **διασπορά** της κατανομής δίνονται από τους τύπους:

Μέση τιμή : E(X)=λ

Διασπορά : V(X)=λ

Κατανομή Poisson (2)-Παραδείγματα

Η κατανομή αφορά **τυχαία διακριτά γεγονότα** ή στοιχεία που συμβαίνουν σπάνια ή εμφανίζονται με πολύ μικρή συχνότητα σε ένα πληθυσμό, όπως το γεγονός:

- να περάσει ένα όχημα από ένα σημείο μιας οδού τη στιγμή t.
- να βρεθεί ένα σκάρτο δοκίμιο σε ένα δείγμα Ν προϊόντων.
- να γίνει κλήση σε τηλεφωνικό κέντρο τη στιγμή t
- Να συμβεί βλάβη σε μια μηχανή τη στιγμή t.
- να πουληθεί ένα προϊόν τη στιγμή t.
- να συμβεί ατύχημα σε ένα σημείο μιας οδού.

Μεθοδολογία για μελέτη περίπτωσης Poisson

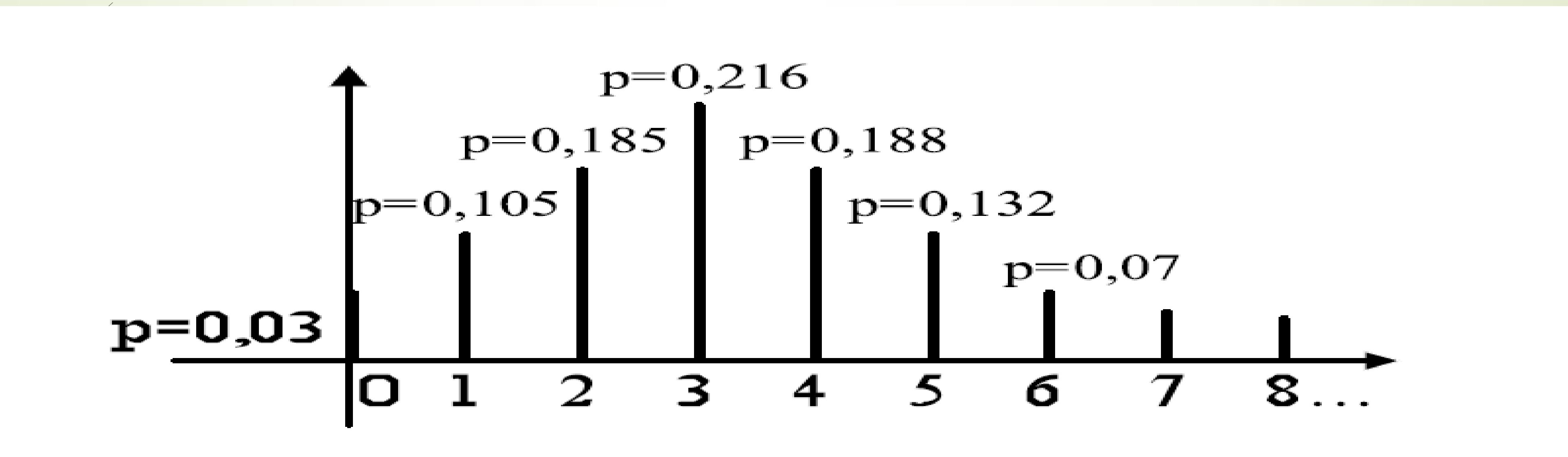
- Επαναλαμβάνουμε ότι αφορά **διακριτή τυχαία** μεταβλητή.
- Όταν για την τ.μ. Χ της οποίας ζητάμε την πιθανότητα έχουμε αναφορά σε **μέσο όρο ή μέση τιμή λ**, τότε οδηγούμαστε στην κατανομή **Poisson.**
- Μπορεί να αναφέρεται στον **χώρο** ή στον **χρόνο**.
- Ελέγχουμε αν ο δοσμένος μέσος όρος λ έχει την **ίδια βάση αναφοράς** με το ζητούμενο (ίσο χρόνο ή χώρο). Αν όχι τότε κάνουμε αναγωγή του δοσμένου στον ζητούμενο.
- **π.χ.** Αν κατά μέσο όρο 3 ατυχήματα συμβαίνουν στη διάρκεια 2

μηνών τότε ο μ.ο. των ατυχημάτων λ για διάρκεια 30 ημερών είναι:

λ=1.5 (2 μήνες = 60 ημέρες).

Παράδειγμα κατανομής Poisson (1)

- Ο μέσος όρος των ατυχημάτων σ' ένα σταυροδρόμι είναι 3.5 ατυχήματα το χρόνο. Οι πιθανότητες για κανένα, ένα, δυο,…κοκ ατυχήματα τον χρόνο δίνονται από την κατανομή **Poisson** και είναι:



- Από την παραπάνω γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι, π.χ. $P(X = 2) = 0,185$

Παράδειγμα κατανομής Poisson (2.1)

Κατά τη διάρκεια χρονικού διαστήματος είκοσι τεσσάρων (24) ετών και συγκεκριμένα μεταξύ των ετών 1975-1997 συμπεριλαμβανομένων, κατεγράφησαν από τους σεισμογράφους του Γεωδυναμικού Ινστιτούτου και του Αστεροσκοπείου Αθηνών επτά (7) συνολικά σεισμικές δονήσεις εντάσεως μεγαλύτερης των 6,5 Richter. Στον πίνακα, δίνεται το έτος που σημειώθηκαν οι σεισμικές δονήσεις και τα αντίστοιχα μεγέθη σε Richter.

ΕΤΟΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	Richter
1979	1	7,30
1981	2	6,80 6,80
1982	1	6,90
1983	2	6,70 6,70
1995	1	6,60
ΣΥΝΟΛΟ	7	

Κατά τη διάρκεια των ετών που δεν αναγράφονται στον πίνακα δεν σημειώθηκαν δονήσεις άνω των 6,5 Richter.
Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η αναφορά μας σε ενδεχόμενο σεισμό αυτού του μεγέθους είναι αναφορά σε **σπάνιο ενδεχόμενο.**
Έστω λοιπόν τώρα X μία **διακριτή τυχαία μεταβλητή** που **μετρά τη συχνότητα** εμφάνισης τέτοιων **σπάνιων** ενδεχομένων σε **προκαθορισμένο χρονικό διάστημα.**

Παράδειγμα κατανομής Poisson (2.2)

Προφανώς, αν X είναι η τυχαία μεταβλητή μέτρησης σεισμών άνω των 6,5 Richter, τότε αυτή ικανοποιεί τα κριτήρια της κατανομής Poisson και άρα την ακολουθεί.

- Για να βρούμε την μέση τιμή (άρα και την διακύμανση), ή αλλιώς την παράμετρο της κατανομής λ, διαιρούμε το πλήθος των σεισμικών δονήσεων που σημειώθηκαν σε 24 χρόνια, δηλαδή 7, δια του 24, οπότε

$$\lambda = 7/24 = 0,292.$$

τιμή που **ερμηνεύεται** ως ο **μέσος αριθμός δονήσεων ανά έτος** μεγέθους μεγαλύτερου των 6,5 Richter.

Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε σεισμό μεγαλύτερο των 6,5 Richter το 2010;

Απάντηση: Αν X η τ.μ που συμβολίζει τη συχνότητα εμφάνισης του φαινομένου θα έχουμε σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$P[X=x]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{0,292^x e^{-0,292}}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots \text{ και } \lambda=0,292$$

οπότε για χ = 0 έχουμε:

$$P[X=0]=\frac{0,292^0 e^{-0,292}}{0!}=e^{-0,292}=0,747$$

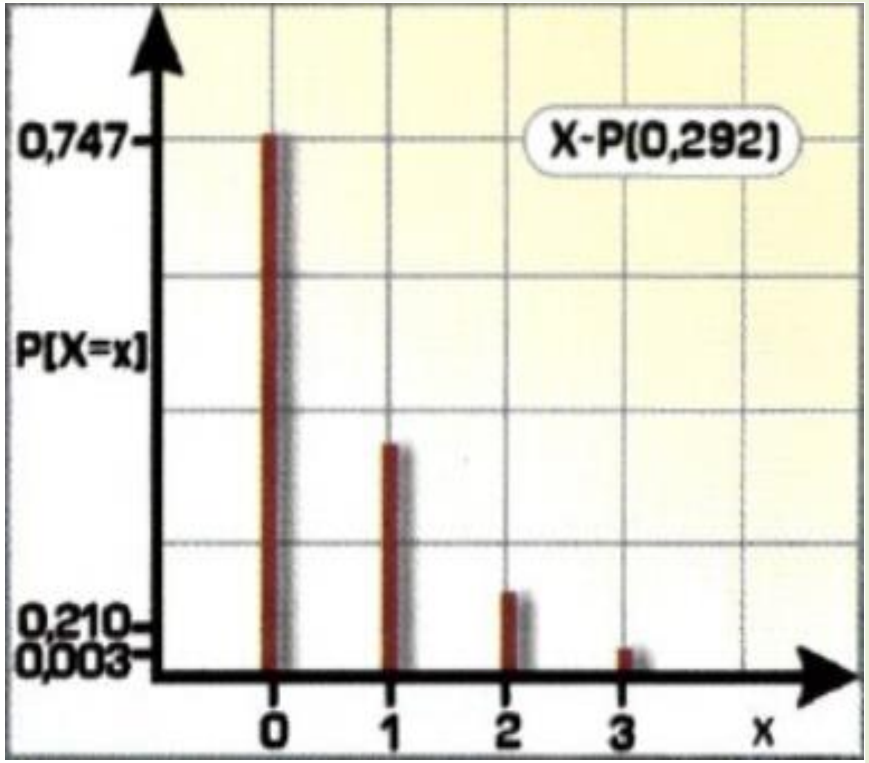
Παράδειγμα κατανομής Poisson (2.3)

Οι πιθανότητες για X=1, X=2 ,... σεισμικές δονήσεις κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου έτους βρίσκονται αναλόγως :

$$P[X=1]=\frac{0{,}292^1 e^{-0{,}292}}{1!}=0{,}218$$

$$P[X=2]=\frac{0{,}292^2 e^{-0{,}292}}{2!}=0{,}032$$

$$P[X=3]=\frac{0{,}292^3 e^{-0{,}292}}{3!}=0{,}003$$



Από τις τιμές των πιθανοτήτων αυτών γίνεται φανερό ότι όσο αυξάνεται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, που όπως είπαμε μετρά την συχνότητα εμφάνισης του φαινομένου, τόσο ελαττώνεται η πιθανότητα της, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο αφού πρόκειται για σπάνιο τυχαίο φαινόμενο (ενδεχόμενο).

Παράδειγμα κατανομής Poisson (3.1)

- Μεταξύ των ωρών 6 μ.μ. και 7 μ.μ. η υπηρεσία καταλόγου Αττικής του Ο.Τ.Ε. δέχεται κατά μέσο όρο 2 κλήσεις το λεπτό. Υποθέτοντας ότι οι κλήσεις κατανέμονται τυχαία στο χρόνο, βρείτε την πιθανότητα η τηλεφωνήτρια της συγκεκριμένης υπηρεσίας να δεχθεί σε κάποιο τυχαία επιλεγμένο λεπτό:
  α) 4 κλήσεις

  β) Τουλάχιστον 5 κλήσεις

  γ) 6 κλήσεις σε τυχαία περίοδο δύο λεπτών

Απάντηση

Επειδή οι κλήσεις γίνονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές του διαστήματος (6,7), η κατανομή της τ.μ. X του αριθμού των κλήσεων είναι Poisson.
α) Συμβολίζουμε με X τον αριθμό των κλήσεων που γίνονται σε τυχαίο λεπτό. Επειδή ο **μέσος αριθμός** των κλήσεων σε διάστημα ενός λεπτού είναι 2, θέτουμε λ=2 και βρίσκουμε :

$$P[X=4] = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = 0{,}090$$

Παράδειγμα κατανομής Poisson (3.2)

β) Πιθανότητα για τουλάχιστον 5 κλήσεις το λεπτό σημαίνει:

$P(X >= 5) = 1 – P(X <= 4) = 1 – P(X = 4) – P(X = 3) – P(X=2) – P(X = 1) – P(X = 0)$ .....

γ) Έστω τώρα Υ ο αριθμός των κλήσεων σε τυχαίο διάστημα δύο λεπτών.
Ο **μέσος αριθμός** κλήσεων ανά δίλεπτο είναι 4, οπότε θέτοντας λ = 4 βρίσκουμε:

$$P[Y=6] = \frac{4^6 \cdot e^{-4}}{6!} = 0,104$$

Εκθετική κατανομή (1)

- **Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως σε περιπτώσεις όπου μελετάμε το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος.**
- Το γεγονός ότι η **συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ** ακολουθεί την εκθετική κατανομή, συμβολίζεται ως: **Χ~ε(λ)**
- Η πιθανότητα ώστε ο χρόνος αναμονής να είναι μικρότερος ή ίσος από x, δίνεται από τον τύπο:

$$P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

- Η **μέση τιμή** και η **διακύμανση** (**διασπορά**) της εκθετικής κατανομής δίνονται από τους τύπους:

Μέση τιμή : $E(\mathbf{X}) = 1/\lambda$

Διασπορά: $\mathbf{V}(X) = 1/\lambda^2$

Παράδειγμα εκθετικής κατανομής (1)

Η διάρκεια σε λεπτά των υπεραστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 λεπτά.

α) Να βρεθεί η πιθανότητα «**η διάρκεια μιας υπεραστικής συνδιάλεξης είναι το πολύ 6 λεπτά**».

β)Να βρεθεί η πιθανότητα «**η διάρκεια μιας υπεραστικής συνδιάλεξης να είναι μεταξύ 4 και 6 λεπτών**».

γ)Να βρεθεί η πιθανότητα «**η διάρκεια μιας υπεραστικής συνδιάλεξης είναι τουλάχιστον 6 λεπτά**».

Απάντηση

α)Αν Χ είναι η διάρκεια σε λεπτά των υπεραστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων, τότε μέση τιμή Ε(Χ) = 1/λ = 2, οπότε λ = ½.

Ζητείται η πιθανότητα : $\mathrm{P}(X \leq 6) = 1 - e^{-\frac{6}{2}} = 0{,}95$

Παράδειγμα εκθετικής κατανομής (2)

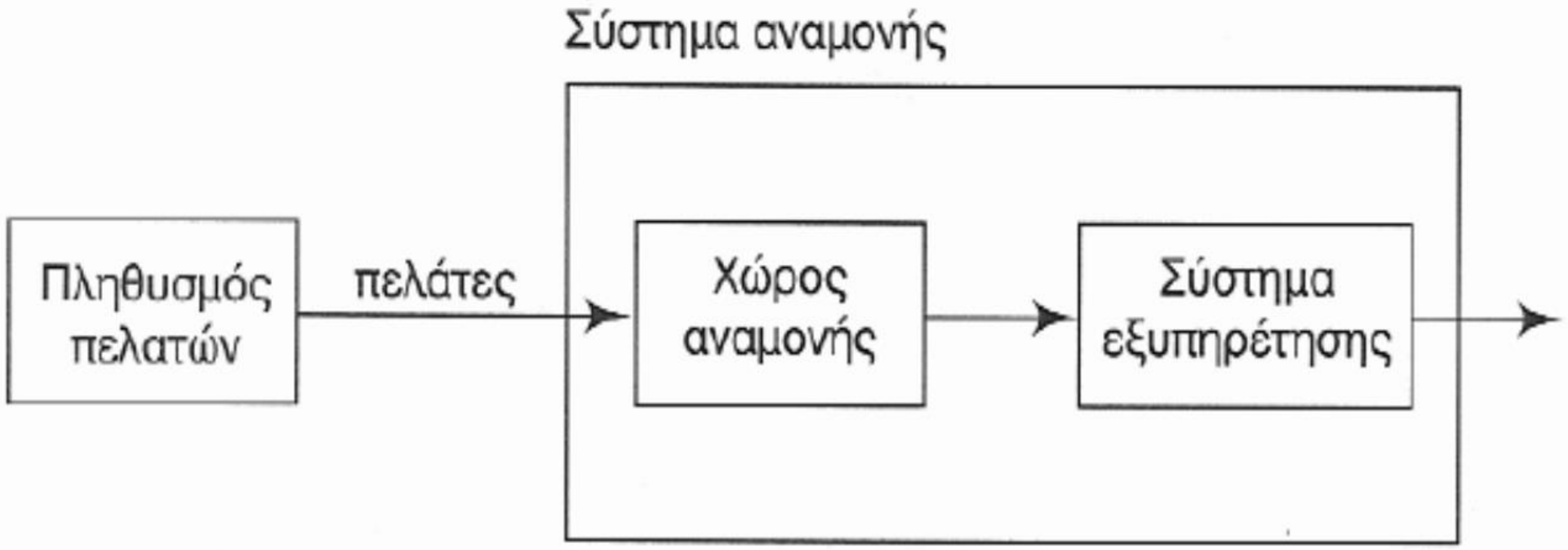
β) Ζητείται η πιθανότητα $P(4 < X < 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 4) = 1 - e^{-\frac{6}{2}} - 1 + e^{-\frac{4}{2}} = 0{,}08$

γ) Ζητείται η πιθανότητα $P(X \geq 6)$.

Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $P(X \leq 6) = 0{,}95$.

Όμως : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Γραφική αναπαράσταση ενός συστήματος αναμονής.



Τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος αναμονής (1)

- **Πηγή (πληθυσμός) Πελατών:** Ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις των πελατών θεωρείται είτε άπειρος (πρακτικά πολύ μεγάλου μεγέθους) όπως π.χ. πελάτες τραπεζών, αυτοκίνητα σε σταθμούς διοδίων, τηλεφωνικές κλήσεις σε τηλεφωνικό κέντρο κλπ, ή πεπερασμένος όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των μηχανών ενός εργοστασίου που αναμένουν επισκευή.

- **Αφίξεις πελατών**: Οι "πελάτες" καταφθάνουν στο σύστημα είτε σύμφωνα με κάποιο γνωστό και σταθερό ρυθμό (π.χ. ένα προϊόν σε ένα σταθμό εργασίας ακριβώς κάθε 15 λεπτά) ή αλλιώς, όπως στις περισσότερες περιπτώσεις, σε «τυχαίες» χρονικές στιγμές (π.χ. ασθενείς σε εφημερίες).

Τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος αναμονής (2)

- **Οι αφίξεις** θεωρούνται τυχαίες όταν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη (δεν επηρεάζεται μία άφιξη από κάποια προηγούμενη) και η χρονική στιγμή πραγματοποίησης τους δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Στην περίπτωση αυτή ο μέσος ρυθμός των αφίξεων χαρακτηρίζεται από το μέσο αριθμό αφίξεων ανά μονάδα του χρόνου (π.χ. "πελάτες" ανά ώρα).
- Η τυχαία μεταβλητή «αριθμός των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου», μπορεί πολλές φορές να προσεγγισθεί από την κατανομή **Poisson**. Αν γίνει αυτό, όταν η μέση τιμή της Poisson αντιστοιχεί στη μέση τιμή των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου, συμβολίζεται με λ και αποτελεί το μέσο ρυθμό αφίξεων στην μονάδα του χρόνου.

Ρυθμός αφίξεων και χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων (κατανομή Poisson/εκθετική)

Όταν οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την κατανομή Poisson, με μέσο ρυθμό αφίξεων ίσο με λ, τότε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή ίση με 1/λ.

Χρόνος εξυπηρέτησης πελατών

- Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση του πελάτη μπορεί να είναι σταθερός ή όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής, να παρουσιάζει μεταβλητότητα που οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Για πολλές περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την **εκθετική κατανομή**, με μέση τιμή $1/\mu$.

Χρόνος εξυπηρέτησης και πλήθος εξυπηρετούμενων πελατών (Εκθετική/Poisson)

- Κατά παρόμοιο τρόπο με την σχέση μεταξύ ρυθμού αφίξεων και χρόνου μεταξύ διαδοχικών αφίξεων, στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι : **«όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ, τότε το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται σε ένα χρονικό διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ίση με μ ».**

Θέσεις εξυπηρέτησης και μέθοδος εξυπηρέτησης.

- Ένα σύστημα αναμονής μπορεί να διαθέτει ένα μόνο σημείο εξυπηρέτησης, ή περισσότερα, τα οποία εξυπηρετούν παράλληλα. Ενδέχεται όμως η εξυπηρέτηση ενός πελάτη να γίνεται σε πολλά στάδια, δηλαδή να πρέπει ο ίδιος πελάτης να περάσει από περισσότερα από ένα σημεία εξυπηρέτησης, σειριακά.
- Η μέθοδος εξυπηρέτησης μπορεί να είναι τύπου
  - **FIFO** ή **FCFS (First In First Out, First Come First Served) όπου η σειρά εξυπηρέτησης είναι ανάλογη της σειράς προσέλευσης στο σύστημα.** Παράδειγμα : εξυπηρέτηση σε σταθμό διοδίων.
  - **LIFO ή LCFS (Last In First Out, Last Come First Served) όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα με την σειρά προσέλευσης.** Παράδειγμα: τα πιάτα σε μια στοίβα ενός λαντζέρη εξυπηρετούνται (πλένονται) με σειρά LIFO.

Συμβολισμός μοντέλων κατά D. G. Kendall (1)

- Ένα σύστημα αναμονής, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του, μπορεί να περιγραφεί εν συντομία με την συμβολοσειρά : **«A/B/s/k/N»** , όπου τα αντίστοιχα γράμματα συμβολίζουν τα εξής:

- **A**: Συμβολίζει την κατανομή προσέλευσης πελατών. Παίρνει μια από τις τιμές **M** (όταν ακολουθείται η κατανομή **Poisson**) ή **G** (που σημαίνει γενική ή οποιαδήποτε κατανομή) ή **D** (που συμβολίζει ντετερμινιστική διαδικασία εισόδου, δηλαδή σταθερό και γνωστό ρυθμό προσέλευσης, απαλλαγμένο από την τυχαιότητα)
- **B**: θέση για την υπόδειξη της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης. Παίρνει τις ίδιες τιμές με το A. Εδώ, το **M** σημαίνει ότι ο **χρόνος εξυπηρέτησης** ακολουθεί **εκθετική κατανομή**,

Συμβολισμός μοντέλων κατά D. G. Kendall (2)

- **s:** θέση για το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης
- **k:** θέση για τη χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης, όταν οι θέσεις στην ουρά αναμονής είναι περιορισμένες. Το k είναι το πλήθος των θέσεων αναμονής μαζί με τις θέσεις εξυπηρέτησης.
- **N:** θέση για το πλήθος των πελατών στην πηγή, όταν είναι πεπερασμένο.

Στις πρακτικές εφαρμογές συχνότατα συναντάμε μοντέλα που περιγράφονται με τα 3 πρώτα γράμματα, π.χ. M|M|1 ή M | M | 3 κ.λ.π.

Κατάσταση ισορροπίας συστήματος

- Είναι λογικό το ότι οι αρχικές συνθήκες λειτουργίας (εκκίνησης) ενός συστήματος γενικά (άρα και ενός συστήματος αναμονής) έχουν κάποια επίδραση πάνω στην μετέπειτα εξέλιξή του, τουλάχιστον για κάποιο χρονικό διάστημα.
- Ορίζουμε ότι ένα σύστημα αναμονής βρίσκεται σε **κατάσταση ισορροπίας** όταν ή λειτουργία του δεν επηρεάζεται πλέον από τις αρχικές συνθήκες. Για να συμβεί αυτό βεβαίως έχει παρέλθει ένα χρονικό διάστημα, το οποίο το ονομάζουμε **παροδική περίοδο.**

Μελέτη του μοντέλου M|M|1

- Μοντέλο M|M|1 σημαίνει ότι οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson και ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Βεβαίως, ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή, ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί κατανομή Poisson. Επίσης, υπάρχει ένα σημείο εξυπηρέτησης, ενώ αυτή πραγματοποιείται κατά την μέθοδο FIFO.

- Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή **Poisson την οποία ακολουθούν οι αφίξεις**, έχει παράμετρο **λ**, δηλαδή ότι η αναμενόμενη μέση τιμή αφίξεων στην μονάδα του χρόνου είναι λ, και ακόμη ότι η **αναμενόμενη μέση τιμή εξυπηρετούμενων πελατών** στην μονάδα του χρόνου είναι μ (η παράμετρος της κατανομής **Poisson** του ρυθμού **εξυπηρέτησης**, επομένως 1/μ η παράμετρος της εκθετικής κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης), τότε **προκειμένου το σύστημα να μπορεί να περιέλθει σε κατάσταση ισορροπίας**, δηλαδή να λειτουργεί, **πρέπει και αρκεί $\lambda < \mu$. Σε αντίθετη περίπτωση η ουρά δεν μπορεί να λειτουργήσει.**

Μελέτη του μοντέλου M|M|s

- Για το μοντέλο M|M|s ισχύουν ως προς τον συμβολισμό τα ίδια με το μοντέλο M|M|1, με την διαφορά ότι εδώ υπάρχουν s σημεία παράλληλης εξυπηρέτησης (και όχι ένα) και ότι και ότι για κάθε ένα σημείο εξυπηρέτησης ισχύουν οι υποθέσεις του μοντέλου M|M|1.
- Κατ' αναλογία με το μοντέλο M|M|1, για να μπορέσει ένα σύστημα αναμονής τύπου M|M|s να περιέλθει σε κατάσταση ισορροπίας (δηλαδή να λειτουργεί και να ανταποκρίνεται στην ζήτηση για εξυπηρέτηση) πρέπει να ισχύει:

$$\boldsymbol{\lambda < s\mu}$$

Τυπολόγιο συστημάτων αναμονής (1) – βασικά μεγέθη

	M/M/1	**M/M/s**
L_s : μέσο πλήθος πελατών που βρίσκονται σε κατάσταση εξυπηρέτησης	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$	$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$
ρ: Βαθμός απασχόλησης του συστήματος εξυπηρέτησης	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$
L_q: μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \cdot P_0$
L: μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα συνολικά	$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ ή $L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$
W_q: μέσο χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ ή $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$
W: μέσο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα	$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$ ή $W = \frac{L}{\lambda}$ ή $W = W_q + \frac{1}{\mu}$	$W = \frac{L}{\lambda}$ ή $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

Τυπολόγιο συστημάτων αναμονής (2) – Πιθανότητες

	M/M/1 (συνέχεια)	M/M/s (συνέχεια)
P_0: πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο σύστημα ή ισοδύναμα το ποσοστό του χρόνου που όλες οι θέσεις είναι αδρανείς	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$	$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$
P_w: πιθανότητα ένας πελάτης που φθάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει	$P_w = 1 - P_0$	$P_w = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)P_0$
P_n: πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$	$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n \le s \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n > s \end{cases}$
$P_{n>k}$: πιθανότητα να υπάρχουν περισσότεροι από κ πελάτες στο σύστημα	$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$	$P_{n>k} = 1 - (P_0 + P_1 + \ldots P_k)$

Σχέση μεταξύ βασικών μεγεθών

Όπως προκύπτει από τους προηγούμενους τύπους, τα μεγέθη L, W, Lq και Wq συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικές σχέσεις και συγκεκριμένα τις εξής:

$L = \lambda W$, $Lq = \lambda Wq$, $Wq = W - (1/\mu)$

Κατά συνέπεια, αν γνωρίζουμε το ένα από αυτά μπορούμε εύκολα να βρούμε τα άλλα δύο.

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (1)

- 1. Η πολιτική της διεύθυνσης ενός πρατηρίου βενζίνης, το οποίο διαθέτει μία μόνο αντλία και απεριόριστο χώρο αναμονής, είναι ότι οι πελάτες θα πρέπει να περιμένουν κατά μέσον όρο 2 λεπτά. Εάν οι πελάτες φθάνουν στο πρατήριο σύμφωνα με μία κατανομή **Poisson** με ρυθμό 20 πελάτες την ώρα και ό μέσος χρόνος εξυπηρέτησης (εκθετικά κατανεμημένος) είναι 2,2 λεπτά, τότε:

  Α)ποιος είναι ο πραγματικός χρόνος αναμονής μέχρι την εξυπηρέτηση;

  Β)Κατά πόσο χρόνο πρέπει να ελαττωθεί ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, για να περιμένει κάποιος πελάτης μέχρι να εξυπηρετηθεί κατά μέσον όρο 2 λεπτά, όπως ακριβώς είναι η πολιτική της διεύθυνσης του πρατηρίου;

  Λύση

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα **M / M /1** ουράς. Εδώ η παράμετρος λ της κατανομής Poisson (αφίξεις) είναι **λ = 20 πελάτες / ώρα**. **Επομένως η βάση αναφοράς είναι η 1 ώρα**. Επίσης, η παράμετρος της εκθετικής κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης ισούται με 2,2. Επομένως, γνωρίζοντας ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης των πελατών ακολουθεί κατανομή Poisson (αφού ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικός) με αντίστροφη παράμετρο από αυτήν της εκθετικής κατανομής, αυτή θα ισούται με μ = 1 /2,2 πελάτες ανά λεπτό ή μ = 60/2,2 πελάτες ανά ώρα ή **μ = 27,3 πελάτες / ώρα.**

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (2)

Επομένως:

Α) Αφού $\lambda < \mu$ η ουρά είναι λειτουργική.

Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά δίνεται από την σχέση:

$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{20}{27{,}3(27{,}3-20)}$ = 0,1 ώρες. (ή 6 λεπτά). Ο χρόνος αναμονής δεν συμφωνεί με την πολιτική του πρατηρίου.

Β) Εάν τώρα απαιτήσουμε να ισχύει: $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = 2 \Rightarrow 2\mu^2 - 2\mu\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow 2\mu^2 - 2\mu\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$

$6\mu^2 - 2\mu - 1 = 0$. Η τελευταία είναι β/θμια εξίσωση ως προς μ, με λύσεις : $\mu = \begin{cases} \mu = \frac{2+\sqrt{28}}{12} = 0{,}61 \\ \mu = \frac{2-\sqrt{28}}{12} < 0 \end{cases}$

Δεκτή λύση είναι η μ = 0,61 πελάτες / λεπτό (είναι ανά λεπτό διότι γράψαμε παραπάνω W_q = 2 **λεπτά**) . Άρα μ = 36,6 πελάτες / ώρα . Επομένως ο ένας πελάτης για να εξυπηρετηθεί θέλει 60/36,6 λεπτά = 1,64 λεπτά. Προφανώς αυτός είναι και ο νέος **μέσος χρόνος εξυπηρέτησης . Άρα ο αρχικός, που ήταν 2,2 λεπτά πρέπει να γίνει 1,64 λεπτά και συνεπώς πρέπει να μειωθεί κατά 0,56 λεπτά.**

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (3)

2) Σ' έναν τηλεφωνικό θάλαμο βρέθηκε ότι οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την κατανομή **Poisson**, με μέση τιμή 10 λεπτά ανάμεσα σε μια άφιξη και την επόμενη. Ο χρόνος διάρκειας κάθε τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 λεπτά.

(α) Ποια η πιθανότητα να βρει κάποιος τον τηλεφωνικό θάλαμο πιασμένο;

(β) Ποιο το μέσο μήκος της ουράς, όταν υπάρχει ουρά;

(γ) Είναι πολιτική του Ο.Τ.Ε να τοποθετεί επί πλέον συσκευές όταν ο πελάτης χρειάζεται να περιμένει κατά μέσο όρο 3 λεπτά για το τηλέφωνο. Πόσο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή των αφίξεων για να χρειαστεί η εγκατάσταση και άλλης συσκευής;

(δ) Εάν τοποθετήσουμε και δεύτερη τηλεφωνική συσκευή, ποιος θα είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά;

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (4)

Λύση

α)Αφού ο μέσος χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων είναι 10 λεπτά, τότε κάθε 10 λεπτά έχουμε μια άφιξη, και επομένως ο ρυθμός αφίξεων που ακολουθεί κατανομή Poisson είναι **λ = 1/10 = 0,1** αφίξεις το λεπτό.

Από την άλλη, επειδή ο χρόνος διάρκειας κάθε τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3 λεπτά, συμπεραίνουμε ότι η εξυπηρέτηση ακολουθεί εκθετική κατανομή με E(X) = 3 λεπτά, όπου E(X) η αναμενόμενη τιμή της εκθετικής κατανομής την οποία ακολουθεί η τ.μ. X του χρόνου εξυπηρέτησης.

Όμως E(X) = 3 = 1/μ άρα **μ = 1/3 = 0,33**. **Αφού λ < μ η ουρά είναι λειτουργική**.

Τώρα, η πιθανότητα να βρει κάποιος τον θάλαμο πιασμένο ισούται με την πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει, οπότε (βλέπε τυπολόγιο) Pw = 1 – Po . Όμως Po = 1 – λ/μ = 0,7, οπότε Pw = 0,3.

β) Το μέσο μήκος της ουράς είναι ίσο με: (βλέπε τυπολόγιο).

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0{,}1^2}{0{,}33(0{,}33-0{,}1)} = 0{,}13 \text{ άτομα}$$

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (5)

γ) Η μέση τιμή του χρόνου αναμονής στην ουρά, ισούται με:

$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\lambda)}$ και θέλουμε αυτή να είναι μεγαλύτερη του 3 για να εγκαταστήσουμε και δεύτερη συσκευή, δηλαδή πρέπει να είναι:

$\frac{\lambda}{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-\lambda)} \geq 3 \Rightarrow \lambda \geq 1/3-\lambda \Rightarrow 2\lambda=1/3 \Rightarrow \lambda=1/6$ άτομα / λεπτό ή **10 άτομα /ώρα**

Δηλαδή θα χρειαστεί να τοποθετήσουμε μια δεύτερη συσκευή, εάν ο ρυθμός των αφίξεων αυξηθεί από 6 άτομα / ώρα σε 10 άτομα / ώρα.

Ασκήσεις στα συστήματα αναμονής (6)

(δ) Εδώ πρόκειται για ένα σύστημα M/M/2 σύστημα ουράς, έτσι η μέση τιμή του χρόνου αναμονής στην ουρά είναι ίση με: (βλέπε τυπολόγιο για s = 2)

$W_q = L_q/\lambda$ όπου $L_q = \frac{P_o(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$ με $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ και

$$\text{και } P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{1}{s!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

(βλέπε τυπολόγιο), οπότε αντικαθιστώντας με λ = 0,1, μ = 0,33, $\frac{\lambda}{\mu}$ = 0,3 έχουμε

Po = 0, 74 και ρ = 0,66 οπότε Lq = 0,007 πελάτες

Άρα, Wq = Lq/λ = 0,007/0,1 = 4,4 δευτερόλεπτα.