



# Ακέραιος Προγραμματισμός

17-03-2017

# Προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

- Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού στα οποία υπάρχει η προϋπόθεση μία ή περισσότερες μεταβλητές να λαμβάνουν ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού
  - Ορισμένες, αλλά όχι όλες οι μεταβλητές, λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Δυαδικές μεταβλητές ή μεταβλητές «0-1»
  - Μπορούν να λαμβάνουν μόνο την τιμή «1» ή την τιμή «0»
- Πρόβλημα «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
  - Όλες οι μεταβλητές του προβλήματος είναι μεταβλητές «0-1»

# Πακέτα λογισμικού

- Παρά το γεγονός ότι ο ακέραιος προγραμματισμός παρέχει σημαντική ευελιξία στη διατύπωση μοντέλων, παρουσιάζει συχνά δυσκολίες ως προς την επίλυσή του
- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο περιλαμβάνει χιλιάδες συνεχείς μεταβλητές μπορεί εύκολα να επιλυθεί με χρήση του κατάλληλου πακέτου λογισμικού
- Αντιθέτως, ένα πρόβλημα καθαρού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού με λιγότερες από 100 μεταβλητές ενδέχεται να παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες κατά την επίλυσή του
- Στην ηλεκτρονική διεύθυνση [www.coin-or.org](http://www.coin-or.org) μπορείτε να αναζητήσετε πληροφορίες αναφορικά με κάποια πακέτα λογισμικού που διατίθενται δωρεάν

# Προγραμματισμός Πληρώματος Πτήσης στην Air New Zealand (1)

- Η Air New Zealand αποτελεί τη μεγαλύτερη αεροπορική εταιρία στη Νέα Ζηλανδία
- Κατά τα τελευταία 15 έτη, η εταιρία ανέπτυξε μοντέλα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για τον προγραμματισμό του πληρώματος πτήσης
- Η Air New Zealand οριστικοποιεί τα προγράμματα πτήσης τουλάχιστον 12 εβδομάδες πριν από την ημερομηνία πτήσης
- Το πρόβλημα προγραμματισμού του πληρώματος αναφέρεται στον προσδιορισμό των πιλότων και των συνοδών αέρος που θα επανδρώσουν το σκάφος

## Προγραμματισμός Πληρώματος Πτήσης στην Air New Zealand (2)

- Η επίλυσή του πραγματοποιείται σε δύο φάσεις
  - Στην 1<sup>η</sup> φάση, καθορίζονται οι κατάλληλες βάρδιες του προσωπικού, προκειμένου να καλυφθούν οι προγραμματισμένες πτήσεις (**πρόβλημα βαρδιών**)
    - Μια βάρδια περιλαμβάνει μια ημερήσια ή πολυήμερη αλληλουχία υπηρεσιών (πτήσεις, εκπαίδευση, κλπ.) και περιόδων ανάπαυσης (ενδιάμεσοι σταθμοί)
    - Σε αυτή τη φάση δεν ενδιαφερόμαστε για το ποιος πιλότος ή συνοδός αέρος θα αναλάβει την κάθε βάρδια
  - Στη 2<sup>η</sup> φάση, οι καθορισμένες βάρδιες ανατίθενται σε συγκεκριμένα μέλη του πληρώματος
    - Η φάση αυτή ονομάζεται **πρόβλημα επάνδρωσης**



## Προγραμματισμός Πληρώματος Πτήσης στην Air New Zealand (3)

- Η Air New Zealand χρησιμοποιεί μοντέλα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση τόσο του προβλήματος των βαρδιών όσο και του προβλήματος επάνδρωσης
- Κάθε μεταβλητή είναι της μορφής «0-1» και αντιστοιχεί σε μια ορισμένη βάρδια που μπορεί να ανατεθεί σε έναν πιλότο ή σε ένα συνοδό αέρος
- Κάθε περιορισμός αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη πτήση
- Προσδιορίζεται επίσης το κόστος για την εκτέλεση κάθε βάρδιας, ενώ στόχος του μοντέλου είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους
- Η Air New Zealand επιλύει ένα διαφορετικό πρόβλημα βαρδιών για κάθε τύπο πληρώματος (πιλότος ή συνοδός αέρος)

## Προγραμματισμός Πληρώματος Πτήσης στην Air New Zealand (4)

- Στο πρόβλημα επάνδρωσης, οι βάρδιες που προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος βαρδιών χρησιμοποιούνται για την κατάρτιση ενός προγράμματος εργασίας για κάθε μέλος του πληρώματος
- Στο μοντέλο ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού του προβλήματος επάνδρωσης, μια μεταβλητή «0-1» αντιπροσωπεύει τα πιθανά προγράμματα εργασίας για κάθε μέλος του πληρώματος
- Σε κάθε εργαζόμενο αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος περιορισμός, ο οποίος εξασφαλίζει ότι θα του ανατεθεί μόνο ένα πρόγραμμα εργασίας
- Άλλοι περιορισμοί αφορούν τις βάρδιες που θα πρέπει να καλύπτονται από κάθε εφικτή λύση του προβλήματος επάνδρωσης

## Προγραμματισμός Πληρώματος Πτήσης στην Air New Zealand (5)

- Η διαδικασία βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται από την Air New Zealand επηρέασε σημαντικά την κερδοφορία της
- Κατά το έτος 1999, οι χρηματικοί πόροι που εξοικονομήθηκαν αντιστοιχούσαν στο 11% του καθαρού λειτουργικού κέρδους της εταιρίας
- Παράλληλα με την εξοικονόμηση χρηματικών πόρων το σύστημα βελτιστοποίησης συνέβαλε
  1. στην εξασφάλιση ποιοτικότερων λύσεων σε μικρότερα χρονικά διαστήματα
  2. στη μείωση των εξαρτήσεων ως προς ένα μικρό αριθμό υπαλλήλων με εξειδίκευση στην κατάρτιση προγραμμάτων
  3. στην ευελιξία του προγράμματος (ως προς τη δημιουργία μικρών αλλαγών)
  4. στη συμμόρφωση της εταιρίας με το ισχύον νομικό πλαίσιο και τις συμβατικές της υποχρεώσεις



# Σημειώσεις και σχόλια (1)

- Επειδή τα προβλήματα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες ως προς την επίλυσή τους σε σχέση με τα αντίστοιχα του γραμμικού προγραμματισμού, δε θα πρέπει να επιχειρείται η χρησιμοποίηση προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού εάν είναι αποδεκτή ως λύση η στρογγυλοποίηση της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

## Σημειώσεις και σχόλια (2)

- Ορισμένα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού είναι δομημένα με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται ότι οι μεταβλητές θα λαμβάνουν μόνο ακέραιες τιμές
- Τέτοια προβλήματα είναι τα
  - προβλήματα εκχώρησης
  - προβλήματα μεταφόρτωσης
  - προβλήματα μεταφοράς

## Είδη μοντέλων ακέραιου προγραμματισμού (1)

- Μοντέλο **καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος** δύο μεταβλητών
  - $\text{Max } 2x_1 + 3x_2$
  - **subject to**
  - $3x_1 + 3x_2 \leq 12$
  - $0,75x_1 + x_2 \leq 4$
  - $x_1 + 2x_2 \leq 6$
  - $x_1, x_2 \geq 0$  και **ακέραιες**
- Αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό «και ακέραιες» λαμβάνουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών
- Αυτό ονομάζεται **χαλάρωση γραμμικού προγράμματος**

## Είδη μοντέλων ακέραιου προγραμματισμού (2)

- Μοντέλο **μεικτού ακέραιου γραμμικού προγράμματος** δύο μεταβλητών
  - $\text{Max } 3x_1 + 4x_2$
  - **subject to**
  - $-x_1 + 2x_2 \leq 8$
  - $x_1 + 2x_2 \leq 12$
  - $2x_1 + x_2 \leq 16$
  - $x_1, x_2 \geq 0$  και η  $x_2$  **ακέραια**
- Αν αφαιρέσουμε τον περιορισμό ακεραιότητας ως προς την μεταβλητή  $x_2$  λαμβάνουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών
- Αυτό ονομάζεται **χαλάρωση γραμμικού προγράμματος**

## Είδη μοντέλων ακέραιου προγραμματισμού (3)

- Πρόβλημα «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
  - Οι ακέραιες μεταβλητές μπορούν να λάβουν μόνο την τιμή «0» ή την τιμή «1»



# Γραφική επίλυση καθαρού αέριου γραμμικού προγράμματος (1)

- Η Eastbone Realty διαθέτει **δύο εκατομμύρια δολάρια** για την αγορά ακινήτων προς ενοικίαση
- Ύστερα από μια αρχική διαλογή, η εταιρία καλείται να κατανείμει το διαθέσιμο προϋπολογισμό μεταξύ πολυτελών μονοκατοικιών και πολυκατοικιών
- Υπάρχουν **πέντε** διαθέσιμες μονοκατοικίες, οι οποίες μπορούν να αγορασθούν έναντι **\$282.000** έκαστη
- Κάθε πολυκατοικία κοστίζει **\$400.000**, χωρίς να υπάρχει περιορισμένη διαθεσιμότητα
- Ο διαχειριστής ακινήτων της Eastborne έχει τη δυνατότητα να διαθέσει **140** ώρες εργασίας για τη διαχείριση των νέων πάγιων στοιχείων

## Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (2)

- Εκτιμάται ότι για κάθε μονοκατοικία θα απαιτηθούν **4** ώρες εργασίας ανά μήνα και για κάθε πολυκατοικία θα απαιτηθούν **40** ώρες ανά μήνα
- Οι ετήσιες ταμειακές ροές που προκύπτουν ύστερα από αφαίρεση των λειτουργικών εξόδων και των καταβολών για αποπληρωμή ενυπόθηκων δανείων ανέρχονται στα **\$10.000** ανά μονοκατοικία και **\$15.000** ανά πολυκατοικία
- Η διεύθυνση της Eastborne επιθυμεί τον προσδιορισμό του αριθμού των μονοκατοικιών και πολυκατοικιών που θα πρέπει να αγοραστούν, προκειμένου να μεγιστοποιηθούν οι ετήσιες ταμειακές ροές

## Γραφική επίλυση καθαρού αέριου γραμμικού προγράμματος (3)

- Αρχικά ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:
  - **T**: αριθμός μονοκατοικιών
  - **A**: αριθμός πολυκατοικιών
- Η αντικειμενική συνάρτηση για τις ταμειακές ροές εκφρασμένη σε χιλιάδες δολάρια είναι:
  - **Max  $10T + 15A$**

## Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (4)

- Οι περιορισμοί του μοντέλου είναι οι ακόλουθοι:
  - $282T + 400A \leq 2.000$  (διαθέσιμα κεφάλαια σε χιλ. \$)
  - $4T + 40A \leq 140$  (χρόνος εργασίας διαχειριστή σε ώρες ανά μήνα)
  - $T \leq 5$  (διαθέσιμες μονοκατοικίες)
- Οι μεταβλητές  $T$  και  $A$  θα πρέπει να μην λαμβάνουν αρνητικές τιμές
- Επίσης, δεν είναι δυνατή η αγορά δεκαδικού αριθμού πολυκατοικιών ή μονοκατοικιών
- Συνεπώς, οι μεταβλητές  $T$  και  $A$  **πρέπει να είναι ακέραιες**

## Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (5)

- Το μοντέλο για το πρόβλημα της Eastborne Realty είναι το ακόλουθο καθαρό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\text{Max } 10T + 15A$$

subject to

$$282T + 400A \leq 2.000$$

$$4T + 40A \leq 140$$

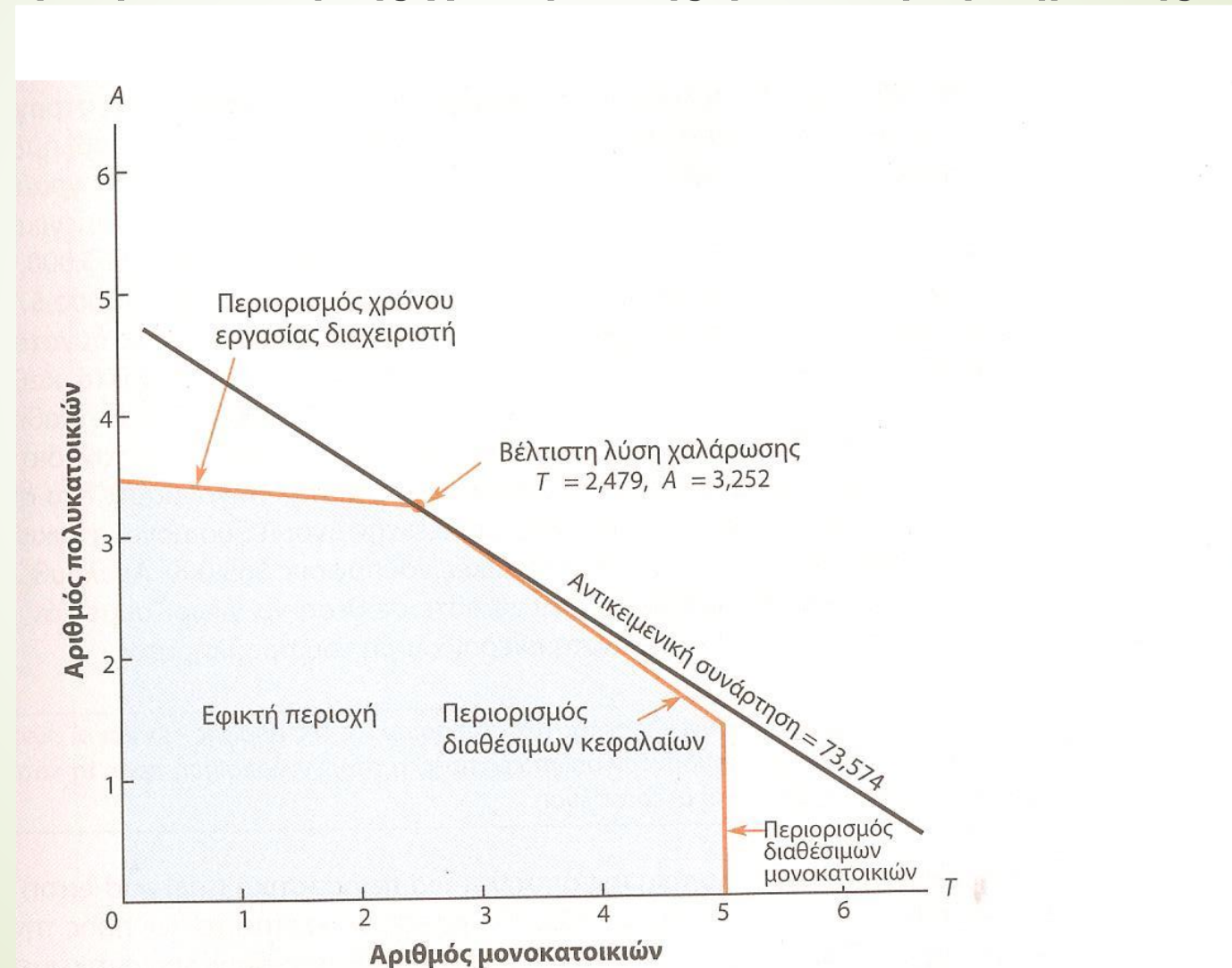
$$T \leq 5$$

$$T, A \geq 0 \text{ και ακέραιες}$$



# Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (6)

- Γραφική επίλυση της χαλάρωσης για το πρόβλημα της Eastborne Realty

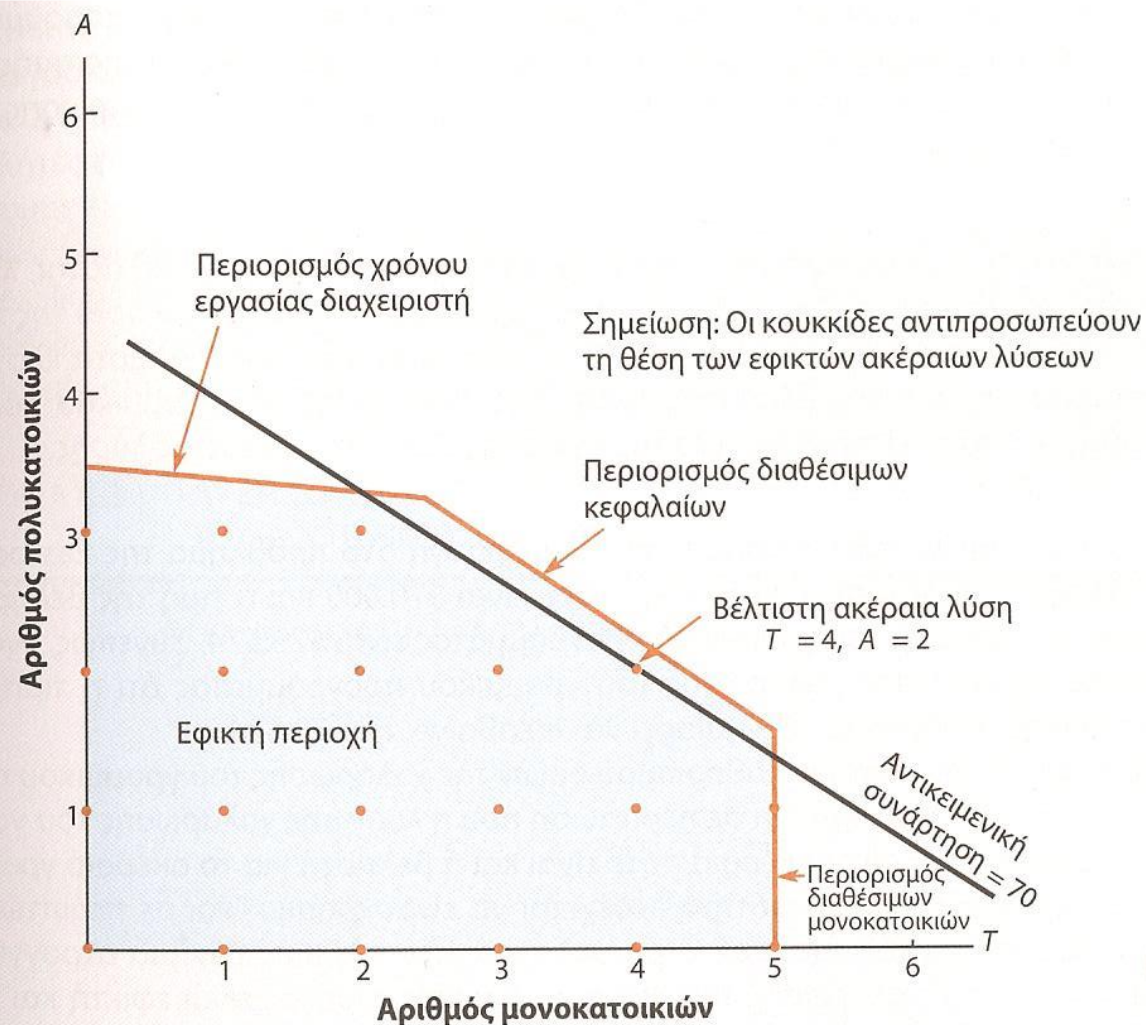


## Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (7)

- Σχεδιάζουμε την εφικτή περιοχή
- Προσδιορίζουμε τις εφικτές λύσεις (ακέραιες τιμές) και τις απεικονίζουμε με κουκίδες
- Μετακινούμε την ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης έως ότου διέλθει από κάποια κουκίδα (η οποία αντιστοιχεί στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης)

# Γραφική επίλυση καθαρού ακέραιου γραμμικού προγράμματος (8)

- Γραφική επίλυση του ακέραιου προβλήματος της Eastborne Realty



# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών

## – Διαχείριση κεφαλαίων (1)

- Η Ice-Gold Refrigerator Company εξετάζει για την προσεχή τετραετία, την τοποθέτηση κεφαλαίων σε ορισμένα επενδυτικά σχέδια
- Λαμβάνοντας υπόψη τους ετήσιους κεφαλαιακούς περιορισμούς, η διεύθυνση της εταιρίας επιθυμεί τον προσδιορισμό των επικερδέστερων τοποθετήσεων
- Η εκτιμώμενη καθαρή παρούσα αξία για κάθε επενδυτικό σχέδιο, οι κεφαλαιακές απαιτήσεις και τα διαθέσιμα κεφάλαια για την εξεταζόμενη περίοδο παρουσιάζονται στον επόμενο Πίνακα



# Εφαρμογές Δυναμικών «0-1» μεταβλητών

## – Διαχείριση κεφαλαίων (2)

	Επενδυτικό σχέδιο				Συνολικά διαθέσιμα κεφάλαια
	Επέκταση εργοστασίου	Επέκταση αποθήκης	Νέος μηχανολογικός εξοπλισμός	Έρευνα για την ανάπτυξη νέων προϊόντων	
<b>Παρούσα αξία</b>	\$90.000	\$40.000	\$10.000	\$37.000	
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 1 <sup>ου</sup> έτους	\$15.000	\$10.000	\$10.000	\$15.000	\$40.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 2 <sup>ου</sup> έτους	\$20.000	\$15.000	-	\$10.000	\$50.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 3 <sup>ου</sup> έτους	\$20.000	\$20.000	-	\$10.000	\$40.000
Κεφαλαιακές απαιτήσεις 4 <sup>ου</sup> έτους	\$15.000	\$5.000	\$4.000	\$10.000	\$35.000



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Διαχείριση κεφαλαίων (3)

- Οι τέσσερις «0-1» μεταβλητές είναι οι ακόλουθες:
  1. **P** = 1, εάν το σχέδιο επέκτασης του εργοστασίου γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
  2. **W** = 1, εάν το σχέδιο επέκτασης της αποθήκης γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
  3. **M** = 1, εάν το σχέδιο προσθήκης μηχανολογικού εξοπλισμού γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί
  4. **R** = 1, εάν το σχέδιο διεξαγωγής έρευνας για ανάπτυξη νέων προϊόντων γίνει αποδεκτό ή 0 εάν απορριφθεί

# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών

## – Διαχείριση κεφαλαίων (4)

- Σε ένα **πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίων**, στόχος της εταιρίας είναι η μεγιστοποίηση της καθαρής παρούσας αξίας των επενδυτικών σχεδίων
- Το εξεταζόμενο πρόβλημα έχει τέσσερις περιορισμούς, οι οποίοι σχετίζονται με τα διαθέσιμα κεφάλαια για κάθε ένα από τα προσεχή τέσσερα έτη

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών

### – Διαχείριση κεφαλαίων (5)

- Το μοντέλο «0-1» ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού για το **πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίων** είναι το εξής:
  - $\text{Max } 90P + 40W + 10M + 37R$
  - subject to
  - $15P + 10W + 10M + 15R \leq 40$  (διαθέσιμα κεφάλαια 1<sup>ου</sup> έτους)
  - $20P + 15W + 10R \leq 50$  (διαθέσιμα κεφάλαια 2<sup>ου</sup> έτους)
  - $20P + 20W + 10R \leq 40$  (διαθέσιμα κεφάλαια 3<sup>ου</sup> έτους)
  - $15P + 5W + 4M + 10R \leq 35$  (διαθέσιμα κεφάλαια 4<sup>ου</sup> έτους)
  - $P, W, M, R = 0 \text{ ή } 1$

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (1)

- Σε πολλές εφαρμογές, το κόστος παραγωγής περιλαμβάνει το κόστος ρύθμισης των γραμμών παραγωγής (σταθερό κόστος) και το μεταβλητό κόστος, το οποίο εξαρτάται άμεσα από τον όγκο της παραγωγής
- Η ενσωμάτωση του κόστους ρύθμισης των γραμμών παραγωγής σε ένα μοντέλο παραγωγής καθίσταται εφικτή με τη χρήση «0-1» μεταβλητών

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (2)

- Θα εξετάσουμε το πρόβλημα σταθερού κόστους μιας μικρής επιχείρησης παραγωγής χημικών προϊόντων της RMC Inc.
- Τρία είδη πρώτων υλών (**πρώτη ύλη 1**, **πρώτη ύλη 2** και **πρώτη ύλη 3**) χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τριών προϊόντων
  1. ενός βελτιωτικού καυσίμου
  2. ενός διαλύτη απορρυπαντικών
  3. ενός υγρού καθαριστικού χαλιών
- Οι μεταβλητές απόφασης που χρησιμοποιούνται είναι:
  - **F**: τόνοι βελτιωτικού καυσίμου που παράγονται
  - **S**: τόνοι διαλύτη απορρυπαντικού που παράγονται
  - **C**: τόνοι υγρού καθαριστικού χαλιών που παράγονται



## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (3)

- Η συνεισφορά στο κέρδος είναι:
  - **\$40** ανά τόνο για το βελτιωτικό καυσίμου
  - **\$30** ανά τόνο για το διαλύτη απορρυπαντικού
  - **\$50** ανά τόνο για το υγρό καθαριστικού χαλιών
- Ένας τόνος βελτιωτικού καυσίμου προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,4** τόνων της πρώτης ύλης 1 και **0,6** τόνων της πρώτης ύλης 3
- Ένας τόνος διαλύτη απορρυπαντικού προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,5** τόνων της πρώτης ύλης 1, **0,2** τόνων της πρώτης ύλης 2 και **0,3** τόνων της πρώτης ύλης 3
- Ένας τόνος υγρού καθαριστικού χαλιών προέρχεται από την ανάμειξη:
  - **0,6** τόνων της πρώτης ύλης 1, **0,1** τόνων της πρώτης ύλης 2 και **0,3** τόνων της πρώτης ύλης 3

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (4)

- Η RMC διαθέτει
  - **20** τόνους της πρώτης ύλης 1
  - **5** τόνους της πρώτης ύλης 2
  - **21** τόνους της πρώτης ύλης 3
- Η διεύθυνση της RMC επιθυμεί τον προσδιορισμό των ποσοτήτων που θα πρέπει να παραχθούν κατά την προσεχή περίοδο

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (5)

- Ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της RMC είναι το ακόλουθο:
  - **Max  $40F + 30S + 50C$**
  - **subject to**
  - **$0,4F + 0,5S + 0,6C \leq 20$**  (πρώτη ύλη 1)
  - **$0,2S + 0,1C \leq 5$**  (πρώτη ύλη 2)
  - **$0,6F + 0,3S + 0,3C \leq 21$**  (πρώτη ύλη 3)
  - **$F, S, C \geq 0$**

## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (6)

- Το προηγούμενο μοντέλο για το πρόβλημα της RMC δεν περιλαμβάνει το **σταθερό κόστος για τη ρύθμιση των γραμμών παραγωγής** και **τους περιορισμούς για τις μέγιστες δυνατές ποσότητες παραγωγής**
- Υποθέτουμε ότι μας είναι γνωστά τα ακόλουθα δεδομένα ως προς το κόστος ρύθμισης των γραμμών παραγωγής και της μέγιστης δυνατής παραχθείσας ποσότητας για καθένα από τα τρία προϊόντα:

Προϊόν	Κόστος ρυθμίσεων	Μέγιστος όγκος παραγωγής
Βελτιωτικό καυσίμου	\$200	50 τόνοι
Διαλύτης απορρυπαντικού	\$50	25 τόνοι
Υγρό καθαριστικό χαλιών	\$400	40 τόνοι

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (7)

- Ορίζουμε τις ακόλουθες «0-1» μεταβλητές προκειμένου να ενσωματώσουμε το σταθερό κόστος στο διατυπωμένο μοντέλο παραγωγής:
  - **SF**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες βελτιωτικού καυσίμου και 0 εάν δεν παραχθούν
  - **SS**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες διαλύτη απορρυπαντικού και 0 εάν δεν παραχθούν
  - **SC**: 1 εάν παραχθούν ποσότητες καθαριστικού χαλιών και 0 εάν δεν παραχθούν
- Έτσι, προκύπτει το κόστος ρυθμίσεων:
  - **$200SF + 50SS + 400SC$**



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (8)

- Η αντικειμενική συνάρτηση που περιλαμβάνει το σταθερό κόστος έχει την εξής μορφή:
  - **$\text{Max } 40F + 30S + 50C - 200SF - 50SS - 400SC$**
- Επιπλέον, προσθέτουμε τους περιορισμούς:
  1.  **$F \leq 50SF$**
  2.  **$S \leq 25SS$**
  3.  **$C \leq 40SC$**
- Για παράδειγμα, εάν  **$SF = 0$**  δεν επιτρέπεται η παραγωγή βελτιωτικού καυσίμου, ενώ εάν  **$SF = 1$**  είναι δυνατή η παραγωγή έως και 50 τόνων βελτιωτικού καυσίμου

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σταθερό κόστος (9)

► Το **μοντέλο σταθερού κόστους** για το πρόβλημα της RMC είναι το ακόλουθο:

- $\text{Max } 40F + 30S + 50C - 200SF - 50SS - 400SC$
- **subject to**
- $0,4F + 0,5S + 0,6C \leq 20$  (πρώτη ύλη 1)
- $0,2S + 0,1C \leq 5$  (πρώτη ύλη 2)
- $0,6F + 0,3S + 0,3C \leq 21$  (πρώτη ύλη 3)
- $F - 50SF \leq 0$  (μέγιστο F)
- $S - 25SS \leq 0$  (μέγιστο S)
- $C - 40SC \leq 0$  (μέγιστο C)
- $F, S, C \geq 0$  και  $SF, SS, SC = 0$  ή  $1$

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (1)

- Η Martin-Beck Company λειτουργεί ένα εργοστάσιο στο St. Louis με ετήσια δυναμικότητα **30.000** μονάδες
- Το προϊόν αποστέλλεται σε περιφερειακά κέντρα διανομής στο Boston, στην Atlanta και στο Houston
- Λόγω μιας αναμενόμενης αύξησης στη ζήτηση, η Martin-Beck εξετάζει την αύξηση της δυναμικότητάς της μέσω της κατασκευής νέων εργοστασίων σε μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες πόλεις: Detroit, Toledo, Denver και Kansas City
- Το αναμενόμενο ετήσιο σταθερό κόστος και η ετήσια δυναμικότητα για τα τέσσερα προτεινόμενα εργοστάσια παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (2)

Προτεινόμενο εργοστάσιο	Ετήσιο σταθερό κόστος	Ετήσια δυναμικότητα
Detroit	\$175.000	10.000
Toledo	\$300.000	20.000
Denver	\$375.000	30.000
Kansas City	\$500.000	40.000

- Σύμφωνα με εκτιμήσεις στελεχών της Martin-Beck, η αναμενόμενη ετήσια ζήτηση ανά κέντρο διανομής είναι:

Κέντρο διανομής	Ετήσια ζήτηση
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (3)

- Το κόστος αποστολής ανά μονάδα από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής παρουσιάζεται στον ακόλουθο Πίνακα

Εργοστάσιο	Κέντρο διανομής		
	Boston	Atlanta	Houston
Detroit	5	2	3
Toledo	4	3	4
Denver	9	7	5
Kansas City	10	4	2
St. Louis	8	4	3

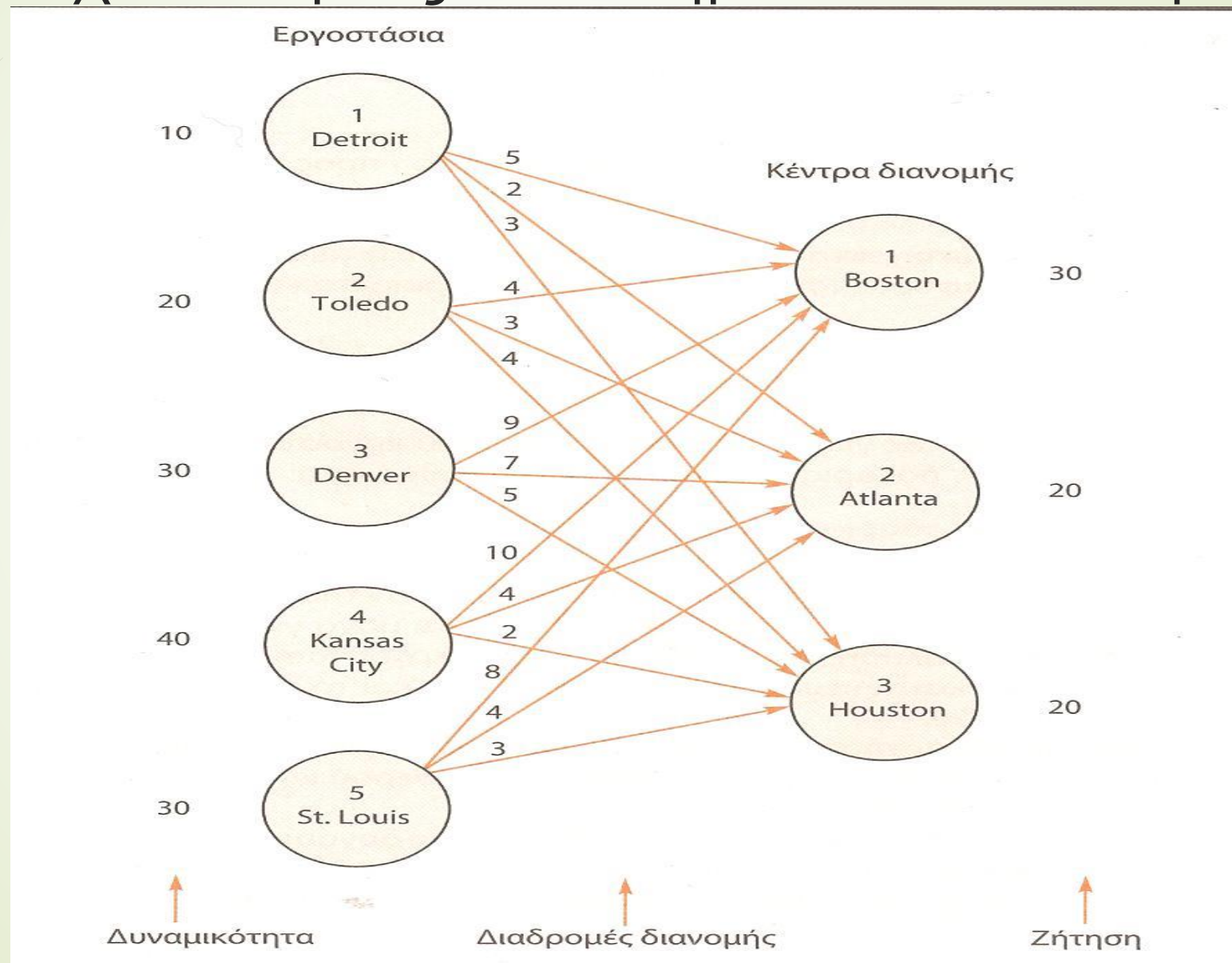


## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (4)

- Το δίκτυο για το συγκεκριμένο πρόβλημα συστήματος διανομής παρουσιάζεται στην επόμενη διαφάνεια
- Περιλαμβάνονται όλες οι πόλεις που εξετάζονται ως προς την εγκατάσταση νέου εργοστασίου
- Η δυναμικότητα και η ζήτηση παρουσιάζονται σε χιλιάδες μονάδες
- Το δίκτυο αφορά ένα πρόβλημα μεταφοράς, το οποίο περιλαμβάνει εργοστάσια στο St. Louis (υπάρχον εργοστάσιο) και σε καθεμία από τις τέσσερις εξεταζόμενες πόλεις (πιθανές τοποθεσίες για εργοστάσιο)
- Όμως δεν έχει ληφθεί ακόμα η απόφαση αναφορικά με το ποιο ή ποια εργοστάσια θα κατασκευαστούν

# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών

## – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (5)



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (6)

- Οι «0-1» μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι εξής:
- $y_1=1$  εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Detroit ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $y_2=1$  εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Toledo ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $y_3=1$  εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Denver ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί
- $y_4=1$  εάν κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Kansas City ή 0 εάν δεν κατασκευαστεί

## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (7)

- Οι μεταβλητές που αναπαριστούν τις ποσότητες που μεταφέρονται από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής ορίζονται με τον ίδιο τρόπο με αυτόν που ορίζονται οι μεταβλητές σε ένα πρόβλημα μεταφοράς και είναι οι εξής:
- $x_{ij}$  = οι μονάδες που μεταφέρονται από το εργοστάσιο  $i$  προς το κέντρο διανομής  $j$  (σε χιλιάδες),  $i = 1,2,3,4,5$  και  $j = 1,2,3$
- Επομένως, το ετήσιο κόστος μεταφοράς (σε χιλιάδες δολάρια) προκύπτει από το άθροισμα:
  - $5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 9x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 10x_{41} + 4x_{42} + 2x_{43} + 8x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53}$



## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (8)

- Το ετήσιο σταθερό κόστος για τη λειτουργία του νέου εργοστασίου ή των νέων εργοστασίων (σε χιλιάδες δολάρια) προκύπτει από το άθροισμα
  - $175y_1 + 300y_2 + 375y_3 + 500y_4$
- Εάν  $y_1 = 0$ , το αντίστοιχο εργοστάσιο δεν θα κατασκευαστεί και το ετήσιο σταθερό κόστος του θα είναι \$0
- Εάν  $y_1 = 1$ , το αντίστοιχο εργοστάσιο θα κατασκευαστεί και το ετήσιο σταθερό κόστος του θα είναι \$175
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το άθροισμα του ετήσιου κόστους μεταφοράς και του ετήσιου σταθερού κόστους για τη λειτουργία του νέου ή των νέων εργοστασίων



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (9)

- Θα ορίσουμε τους **περιορισμούς δυναμικότητας** για τα τέσσερα προτεινόμενα εργοστάσια και για το υφιστάμενο στο St. Louis
- Για το προτεινόμενο εργοστάσιο στο Detroit
  - $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10y_1$
- Σε περίπτωση που κατασκευαστεί εργοστάσιο στο Detroit θα έχουμε  $y_1 = 1$  και ο συνολικός αριθμός των μονάδων που θα μεταφερθούν από το Detroit προς τα τρία κέντρα διανομής θα πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τη δυναμικότητα των 10.000 μονάδων
- Εάν το εργοστάσιο δεν κατασκευαστεί θα έχουμε  $y_1 = 0$  και συνεπώς δυναμικότητα ίση με 0 (άρα  $x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0$ )

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (10)

- Μεταφέροντας όλες τις μεταβλητές στο αριστερό μέρος λαμβάνουμε τον ακόλουθο περιορισμό για το προτεινόμενο εργοστάσιο στο Detroit
  - $x_{11} + x_{12} + x_{13} - 10y_1 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Detroit)
- Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τους περιορισμούς για τα υπόλοιπα προτεινόμενα εργοστάσια:
  - $x_{21} + x_{22} + x_{23} - 20y_2 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Toledo)
  - $x_{31} + x_{32} + x_{33} - 30y_3 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Denver)
  - $x_{41} + x_{42} + x_{43} - 40y_4 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Kansas City)
- Για το εργοστάσιο στο St. Louis, επειδή αυτό ήδη υφίσταται, ο περιορισμός είναι ο εξής:
  - $x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 30$  (περιορισμός υφιστάμενου στο St. Louis)

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (11)

- Θα ορίσουμε τους περιορισμούς ζήτησης για τα τρία κέντρα διανομής
  - $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30$  (κέντρο διανομής Boston)
  - $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 20$  (κέντρο διανομής Atlanta)
  - $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 20$  (κέντρο διανομής Houston)

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (11)

- Το ολοκληρωμένο πρόγραμμα σχεδιασμού του συστήματος διανομής της Martin-Beck είναι το ακόλουθο

- $\text{Min } 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 9x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 10x_{41} + 4x_{42} + 2x_{43} + 8x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53} + 175y_1 + 300y_2 + 375y_3 + 500y_4$
- subject to
- $x_{11} + x_{12} + x_{13} - 10y_1 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Detroit)
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} - 20y_2 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Toledo)
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} - 30y_3 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Denver)
- $x_{41} + x_{42} + x_{43} - 40y_4 \leq 0$  (περιορισμός προτεινόμενου για Kansas City)
- $x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 30$  (περιορισμός υφιστάμενου στο St. Louis)
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30$  (κέντρο διανομής Boston)
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 20$  (κέντρο διανομής Atlanta)
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 20$  (κέντρο διανομής Houston)
- $x_{ij} \geq 0$  για κάθε  $i, j$  και  $y_1, y_2, y_3, y_4 = 0$  ή  $1$

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Σχεδιασμός συστημάτων διανομής (12)

- Εάν επιθυμούμε να αποκλείσουμε την πιθανότητα ταυτόχρονης κατασκευής εργοστασίων σε δύο πόλεις που απέχουν ελάχιστα η μία από την άλλη ποιον περιορισμό θα έπρεπε να προσθέσουμε στο μοντέλο;
- $y_1 + y_2 \leq 1$  (για αμοιβαίο αποκλεισμό κατασκευής εργοστασίου στις πόλεις Detroit και Toledo)
- Εάν επιθυμούμε την υποχρεωτική κατασκευή ενός εργοστασίου σε μόνο μία από δύο συγκεκριμένες πόλεις (όχι και στις δύο) ποιον περιορισμό θα έπρεπε να προσθέσουμε στο μοντέλο;
- $y_1 + y_2 = 1$  (υποχρεωτική κατασκευή εργοστασίου είτε στο Detroit είτε στο Toledo, όχι όμως και στις δύο)

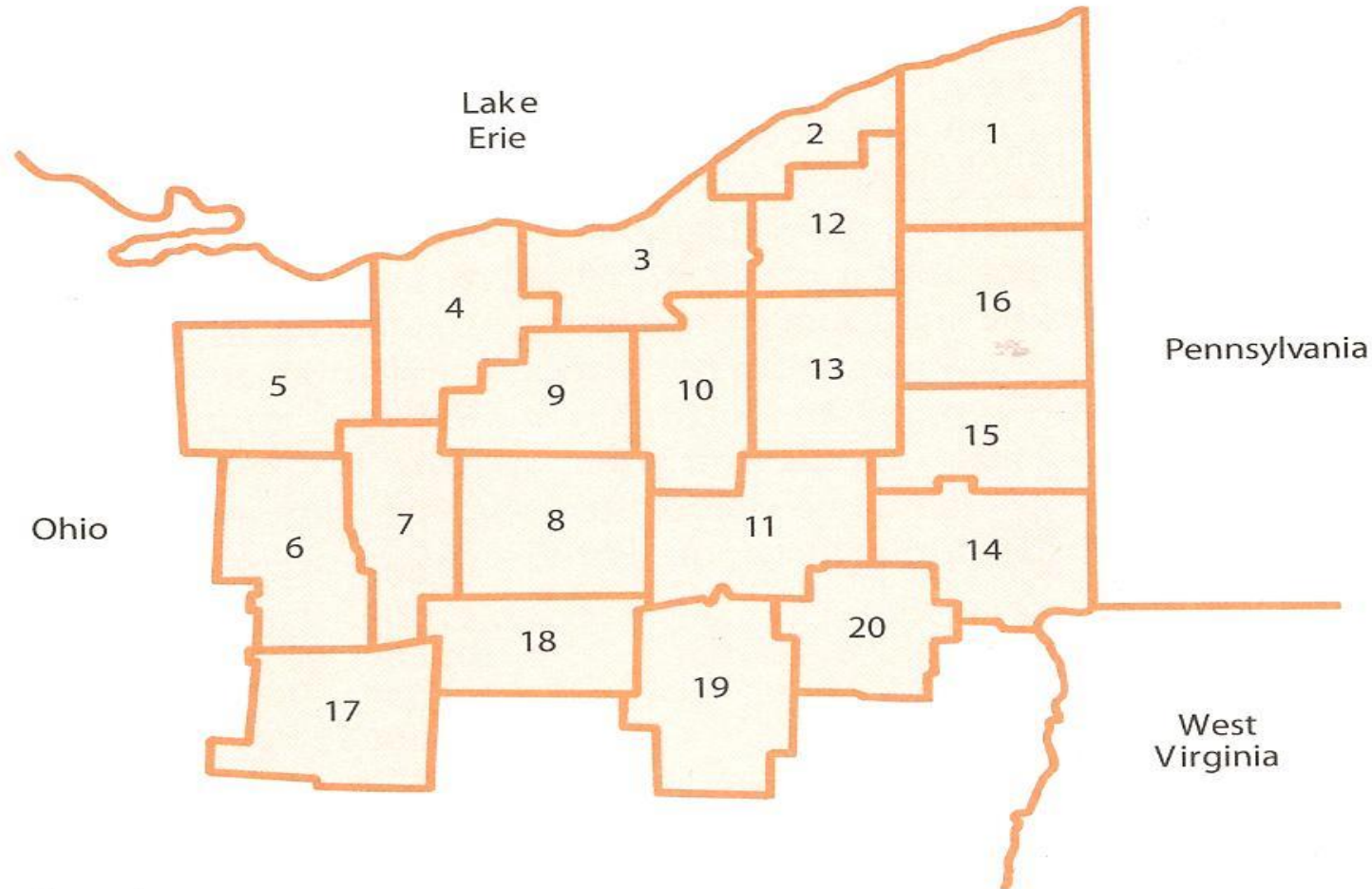


## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (1)

- Το τμήμα γεωγραφικής επέκτασης του τραπεζικού οργανισμού Ohio Trust εξετάζει την επέκταση των δραστηριοτήτων του σε μια περιοχή 20 περιφερειών στο βορειο-ανατολικό τμήμα του Ohio
- Η Ohio Trust δεν διαθέτει κεντρικό κατάστημα σε καμία από τις 20 περιφέρειες
- Σύμφωνα με το ισχύον νομικό πλαίσιο, εάν μια τράπεζα εγκαταστήσει κεντρικό κατάστημα σε μία περιφέρεια, έχει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στη συγκεκριμένη περιφέρεια, καθώς και σε όλες τις όμορες περιφέρειες
- Όμως για να δημιουργηθεί ένα κεντρικό κατάστημα, η Ohio Trust θα πρέπει να εξασφαλίσει ειδική άδεια από την εποπτική αρχή της πολιτείας του Ohio ή να εξαγοράσει ένα υφιστάμενο κεντρικό κατάστημα άλλου οργανισμού

# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (2)

50



## Περιφέρειες

- |              |             |                |                |
|--------------|-------------|----------------|----------------|
| 1. Ashtabula | 6. Richland | 11. Stark      | 16. Trumbull   |
| 2. Lake      | 7. Ashland  | 12. Geauga     | 17. Knox       |
| 3. Cuyahoga  | 8. Wayne    | 13. Portage    | 18. Holmes     |
| 4. Lorain    | 9. Medina   | 14. Columbiana | 19. Tuscarawas |
| 5. Huron     | 10. Summit  | 15. Mahoning   | 20. Carroll    |

## Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (3)

- Στον Πίνακα της επόμενης διαφάνειας παρουσιάζονται οι εξεταζόμενες 20 περιφέρειες και οι όμορες περιφέρειες
- Για παράδειγμα η περιφέρεια Ashtabula συνορεύει με τις περιφέρειες Lake, Geauga και Trumbull, η περιφέρεια Lake County με τις περιφέρειες Ashtabula, Cuyahoga και Geauga, κ.ο.κ.

# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (4)

## Εξεταζόμενες περιφέρειες

1. Ashtabula
2. Lake
3. Cuyahoga
4. Lorain
5. Huron
6. Richland
7. Ashland
8. Wayne
9. Medina
10. Summit
11. Stark
12. Geauga
13. Portage
14. Columbiana
15. Mahoning
16. Trumbull
17. Knox
18. Holmes
19. Tuscarawas
20. Carroll

## Όμορες περιφέρειες (κατά αύξοντα αριθμό)

- 2, 12, 16
- 1, 3, 12
- 2, 4, 9, 10, 12, 13
- 3, 5, 7, 9
- 4, 6, 7
- 5, 7, 17
- 4, 5, 6, 8, 9, 17, 18
- 7, 9, 10, 11, 18
- 3, 4, 7, 8, 10
- 3, 8, 9, 11, 12, 13
- 8, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20
- 1, 2, 3, 10, 13, 16
- 11, 15, 20
- 11, 15, 20
- 11, 13, 14, 16
- 1, 12, 13, 15
- 6, 7, 18
- 7, 8, 11, 17, 19
- 11, 18, 20
- 11, 14, 19



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (5)

- Η Ohio Trust επιθυμεί να δραστηριοποιηθεί στο σύνολο των 20 περιφερειών δημιουργώντας όσο το δυνατόν λιγότερα κεντρικά καταστήματα
- Οι μεταβλητές «0-1» που πρέπει να οριστούν είναι οι εξής:
  - $x_i = 1$  εάν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα στην περιφέρεια  $i$  ή 0 εάν δεν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα σε αυτή ( $i = 1, 2, \dots, 20$ )
- Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί τον αριθμό των κεντρικών υποκαταστημάτων που θα απαιτηθούν είναι
  - **$\text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_{20}$**



## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (6)

- Υποκατάστημα μπορούν να εγκατασταθούν σε μια περιφέρεια εάν αυτή διαθέτει κεντρικό κατάστημα ή εάν συνορεύει με περιφέρεια που διαθέτει κεντρικό κατάστημα
- Συνεπώς, απαιτείται η διατύπωση ενός περιορισμού για κάθε περιφέρεια
- Για παράδειγμα ο περιορισμός για την περιφέρεια Ashtabula θα είναι
  - $x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1$  **(Ashtabula)**
- Η ικανοποίηση του συγκεκριμένου περιορισμού εξασφαλίζει την εγκατάσταση ενός τουλάχιστον υποκαταστήματος στην περιφέρεια Ashtabula ή σε μία ή περισσότερες από τις όμορες προς αυτήν περιφέρειες
- Δηλαδή εξασφαλίζει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στην περιφέρεια της Ashtabula

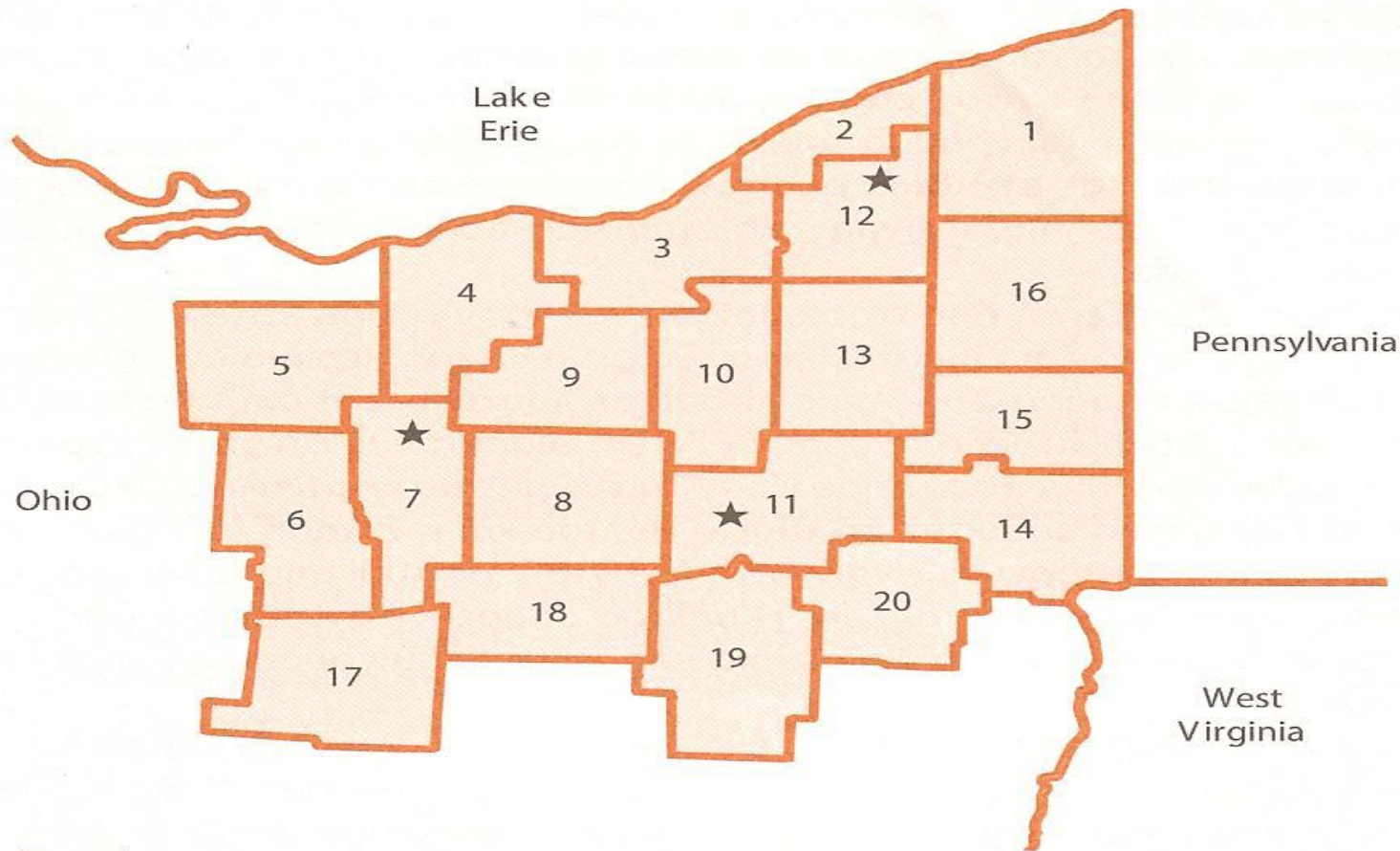
## Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (7)

➤ Το ολοκληρωμένο μοντέλο για το **πρόβλημα επιλογής θέσης τραπεζικών καταστημάτων** είναι:

- $\text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_{20}$
- **subject to**
- $x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1$       (Ashtabula)
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_{12} \geq 1$       (Lake)
- .
- .
- .
- $x_{11} + x_{14} + x_{19} + x_{20} \geq 1$       (Carroll)
- $x_i = 0 \text{ ή } 1 \text{ για } i = 1, 2, \dots, 20$

# Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (8)

- Περιφέρειες εγκατάστασης κεντρικών καταστημάτων της Ohio Trust



## Περιφέρειες

1. Ashtabula  
2. Lake  
3. Cuyahoga  
4. Lorain  
5. Huron

6. Richland  
7. Ashland  
8. Wayne  
9. Medina  
10. Summit

11. Stark  
12. Geauga  
13. Portage  
14. Columbiana  
15. Mahoning

16. Trumbull  
17. Knox  
18. Holmes  
19. Tuscarawas  
20. Carroll

★ Περιφέρειες στις οποίες  
θα πρέπει να εγκατασταθεί  
κεντρικό κατάστημα.