



Ανάλυση διακύμανσης (Μέρος 3^ο)

$a \times b$ Παραγοντικό Πείραμα (1)

- ▶ Όταν θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση (στη μεταβλητή απόφαση) δύο παραγόντων, έστω A και B, με **a** στάθμες ο A και **b** στάθμες ο B, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα **$a \times b$** παραγοντικό πείραμα
- ▶ Σε ένα τέτοιο πείραμα, κάθε στάθμη του ενός παράγοντα συνδυάζεται με κάθε στάθμη του άλλου παράγοντα, δηλαδή, συνολικά έχουμε **$a \cdot b$** διαφορετικές επεμβάσεις (διαφορετικούς συνδυασμούς από δύο στάθμες, μία για κάθε παράγοντα)

a x b Παραγοντικό Πείραμα (2)

- Θεωρούμε ότι για κάθε επέμβαση παίρνουμε ίδιο αριθμό παρατηρήσεων, έστω r , και επομένως ότι έχουμε $a \cdot b \cdot r$ παρατηρήσεις
- Αν $r > 1$, πέραν της επίδρασης του παράγοντα A και της επίδρασης του παράγοντα B, μπορούμε να ελέγξουμε και αν, στη μεταβλητή απόκρισης υπάρχει στατιστικά σημαντική επίδραση που να οφείλεται στην αλληλεπίδραση των παραγόντων A και B

a x b Παραγοντικό Πείραμα (3)

- ▶ Αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι δύο παράγοντες A και B επιδρούν στη μεταβλητή απόκρισης **ανεξάρτητα**, σχεδιάζουμε και εκτελούμε ένα **a x b** παραγοντικό πείραμα με μία παρατήρηση για κάθε επέμβαση ($r = 1$)
- ▶ Αν μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι δύο παράγοντες A και B δεν επιδρούν στη μεταβλητή απόκρισης ανεξάρτητα, δηλαδή υπάρχει επίδραση του ενός παράγοντα στη συμπεριφορά του άλλου, σχεδιάζουμε και εκτελούμε ένα **a x b** παραγοντικό πείραμα με περισσότερες από μία παρατηρήσεις για κάθε επέμβαση ($r > 1$)

a x b Παραγοντικό Πείραμα (4)

- Οι έλεγχοι που πραγματοποιούνται για $r > 1$ είναι οι εξής:
 - Για την αλληλεπίδραση των δύο παραγόντων A και B
 - $H_{0\gamma}$: οι παράγοντες A και B δεν αλληλεπιδρούν
 - $H_{1\gamma}$: οι παράγοντες A και B αλληλεπιδρούν
 - Για την κύρια επίδραση του παράγοντα A
 - $H_{0\alpha}$: ο παράγοντας A δεν επιδρά, ή αλλιώς, δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των \mathbf{a} μέσων του παράγοντα A
 - $H_{1\alpha}$: ο παράγοντας A επιδρά, ή αλλιώς, τουλάχιστον δύο από τους \mathbf{a} μέσους του παράγοντα A διαφέρουν
 - Για την κύρια επίδραση του παράγοντα B
 - H_{0b} : ο παράγοντας B δεν επιδρά, ή αλλιώς, δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των \mathbf{b} μέσων του παράγοντα B
 - H_{1b} : ο παράγοντας B επιδρά, ή αλλιώς, τουλάχιστον δύο από τους \mathbf{b} μέσους του παράγοντα B διαφέρουν

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με $r > 1$ παρατηρήσεις ανά παρέμβαση (1)

6

Πηγή μεταβλητότητας	Β.Ε.	Άθροισμα τετραγώνων SS	Μέσο άθροισμα τετραγώνων MS	Κριτήριο F	Περιοχή απόρριψης
Παράγοντας Α	$a-1$	$SSA = \sum_{i=1}^a \frac{A_i^2}{br} - \frac{G^2}{n}$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$	$F_A \geq F_{a-1; ab(r-1); a}$
Παράγοντας Β	$b-1$	$SSB = \sum_{j=1}^b \frac{B_j^2}{ar} - \frac{G^2}{n}$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$	$F_B \geq F_{b-1; ab(r-1); a}$
Αλληλεπίδραση Α και Β	$(a-1)(b-1)$	$SSA(AB) = \sum_{ij} \frac{(AB)_{ij}^2}{r} - \frac{G^2}{n} - SSA - SSB$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{(a-1)(b-1)}$	$F_{AB} = \frac{MS(AB)}{MSE}$	$F_{AB} \geq F_{(a-1)(b-1); ab(r-1); a}$
Σφάλμα ή Εντός των δειγμάτων	$ab(r-1)$	$SSE = SST_{ot} - SSA - SSB - SS(AB)$	$MSE = \frac{SSE}{ab(r-1)}$		
Ολική	$abr-1$	$SST_{ot} = SSA + SSB + SS(AB) + SSE$			

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με $r > 1$ παρατηρήσεις ανά παρέμβαση (2)

7

► Όπου

- a οι στάθμες του παράγοντα A και b οι στάθμες του παράγοντα B
- $G = \sum_{ijh} y_{ijh}$, το γενικό άθροισμα όλων των $a \cdot b \cdot r$ παρατηρήσεων
- $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων στην i στάθμη του παράγοντα A
- $B_j, j = 1, 2, \dots, b$ το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων στην j στάθμη του παράγοντα B
- $(AB)_{ij}$ το άθροισμα των r παρατηρήσεων που πήραμε από την i στάθμη του παράγοντα A και την j στάθμη του παράγοντα B
- $SSTot = \sum_{ijh} y_{ijh}^2 - \frac{G^2}{n}$
- Μεταβλητότητα μεταξύ των κελιών
 - $SSCells = \sum_{ij} \frac{(AB)_{ij}^2}{r} - \frac{G^2}{n} = SSA + SSB + SS(AB)$
- $SSTot = SSCells + SSE = SSA + SSB + SS(AB) + SSE$

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με $r > 1$ παρατηρήσεις ανά παρέμβαση (3)

8

► Υποθέσεις

- Τα $a \cdot b$ δείγματα είναι ανεξάρτητα τυχαία δείγματα (όλες οι παρατηρήσεις y_{ijh} είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες)
- Κάθε δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό
- Οι $a \cdot b$ πληθυσμοί έχουν κοινή διακύμανση σ^2 (ομοσκεδαστικότητα)

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με $r > 1$ παρατηρήσεις ανά παρέμβαση (4)

9

- ▶ Αν ε_{ijh} η απόκλιση της Y_{ijh} από τη μέση τιμή της μ_{ij} , του πληθυσμού ij , τότε οι προηγούμενες υποθέσεις είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις ότι
 - τα **σφάλματα (θεωρητικά υπόλοιπα)** ε_{ijh} είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα
 - ακολουθούν κανονικές κατανομές με μέση τιμή $\mathbf{0}$ και κοινή διακύμανση σ^2 , δηλαδή ότι $\varepsilon_{ijh} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$
- ▶ Οι υποθέσεις αυτές ελέγχονται όπως στο εντελώς τυχαίοποιημένο σχέδιο

α x β Παραγοντικό Πείραμα (5)

- Οι έλεγχοι που πραγματοποιούνται για $r = 1$ είναι οι εξής:
 - Για την κύρια επίδραση του παράγοντα A
 - $H_{0\alpha}$: ο παράγοντας A δεν επιδρά, ή αλλιώς, δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των α μέσων του παράγοντα A
 - $H_{1\alpha}$: ο παράγοντας A επιδρά, ή αλλιώς, τουλάχιστον δύο από τους α μέσους του παράγοντα A διαφέρουν
 - Για την κύρια επίδραση του παράγοντα B
 - $H_{0\beta}$: ο παράγοντας B δεν επιδρά, ή αλλιώς, δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των β μέσων του παράγοντα B
 - $H_{1\beta}$: ο παράγοντας B επιδρά, ή αλλιώς, τουλάχιστον δύο από τους β μέσους του παράγοντα B διαφέρουν

Σημείωση: κάνουμε την παραδοχή ότι δεν υπάρχει επίδραση στη μεταβλητή απόκρισης που να οφείλεται στην αλληλεπίδραση των δύο παραγόντων

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με μια παρατήρηση ($r=1$) ανά παρέμβαση (1)

11

Πηγή μεταβλητότητας	Β.Ε.	Άθροισμα τετραγώνων SS	Μέσο άθροισμα τετραγώνων MS	Κριτήριο F	Περιοχή απόρριψης
Παράγοντας A	$a-1$	$SSA = \sum_{i=1}^a \frac{A_i^2}{b} - \frac{G^2}{n}$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$	$F_A \geq F_{a-1;(a-1)(b-1);a}$
Παράγοντας B	$b-1$	$SSB = \sum_{j=1}^b \frac{B_j^2}{a} - \frac{G^2}{n}$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$	$F_B \geq F_{b-1;(a-1)(b-1);a}$
Σφάλμα ή Εντός των δειγμάτων	$(a-1)(b-1)$	$SSE = SST_{ot} - SSA - SSB$	$MSE = \frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$		
Ολική	$ab-1$	$SST_{ot} = SSA + SSB + SSE$			

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με μια παρατήρηση ($r=1$) ανά παρέμβαση (2)

► **όπου**

- a οι στάθμες του παράγοντα A και b οι στάθμες του παράγοντα B
- $G = \sum_{ij} y_{ij}$, το γενικό άθροισμα όλων των $a \cdot b$ παρατηρήσεων
- $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων στην i στάθμη του παράγοντα A
- $B_j, j = 1, 2, \dots, b$ το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων στην j στάθμη του παράγοντα B
- $SSTot = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}$
- $SSE = SSTot - SSA - SSB$

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με μια παρατήρηση ($r=1$) ανά παρέμβαση (3)

► Υποθέσεις

- Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση των δύο παραγόντων
- Τα $a \cdot b$ δείγματα είναι ανεξάρτητα τυχαία δείγματα (όλες οι παρατηρήσεις y_{ij} είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες)
- Κάθε δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό
- Οι $a \cdot b$ πληθυσμοί έχουν κοινή διακύμανση σ^2 (ομοσκεδαστικότητα)

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης για το $a \times b$ παραγοντικό πείραμα με μια παρατήρηση ($r=1$) ανά παρέμβαση (4)

- ▶ Αν ε_{ij} η απόκλιση της Y_{ij} από τη μέση τιμή της μ_{ij} , του πληθυσμού ij , τότε οι προηγούμενες υποθέσεις είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις ότι
 - τα **σφάλματα (θεωρητικά υπόλοιπα)** ε_{ij} είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα
 - ακολουθούν κανονικές κατανομές με μέση τιμή $\mathbf{0}$ και κοινή διακύμανση σ^2 , δηλαδή ότι $\varepsilon_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$
- ▶ Οι υποθέσεις αυτές ελέγχονται όπως στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο

Παράδειγμα 1

- Ένας ερευνητής ενδιαφέρεται να διερευνήσει αν και πώς οι δύο παράγοντες, θερμοκρασία, έστω A (με τέσσερις στάθμες 25°C, 30°C, 35°C και 40°C) και τιμή pH, έστω B (με τρεις στάθμες 5, 6 και 7) επιδρούν στην ανάπτυξη του συγκεκριμένου είδους φυτών, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

		Θερμοκρασία (παράγοντας A)			
		25°C	30°C	35°C	40°C
Τιμή pH (παράγοντας B)	B1 (5)	9	13	18	22
	B2 (6)	11	17	22	28
	B3 (7)	18	23	27	20
		20	27	33	24
		36	27	23	7
		44	33	27	13

Παράδειγμα 2

- Ένας ερευνητής για να διερευνήσει αν επηρεάζεται το αποτέλεσμα μιας χημικής αντίδρασης από το είδος του καταλύτη και από τη θερμοκρασία, καθόρισε τέσσερις στάθμες καταλύτη (A_1, A_2, A_3 και A_4) και τρεις στάθμες θερμοκρασίας ($B_1, B_2,$ και B_3) και για κάθε συνδυασμό καταλύτη – θερμοκρασίας, εκτέλεσε το πείραμα μία φορά
- Θεωρώντας ότι οι δύο παράγοντες δεν αλληλεπιδρούν θα κάνει τον έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας 5%

Θερμοκρασία (παράγοντας B)	Καταλύτης (παράγοντας A)			
	A1	A2	A3	A4
B1	53	59	58	50
B2	57	65	62	60
B3	52	62	54	52