Ανάλυση διακύμανσης (Μέρος 1ο)

17/3/2017

Γιατί ανάλυση διακύμανσης; (1)

- Ας θεωρήσουμε k πληθυσμούς με μέσες τιμές μ_1, μ_2, …, μ_k, αντίστοιχα
- Πως μπορούμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές k πληθυσμών όταν k > 2;
- Μια απλή λύση θα μπορούσε να είναι η σύγκριση να γίνει ανά δύο
- Να γίνουν δηλαδή όλοι οι $c = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ έλεγχοι

$$\begin{matrix} \mathrm{H}_0: \mu_i = \mu_j \\ \mathrm{H}_1: \mu_i \neq \mu_j \end{matrix}, \mu\varepsilon\ i \neq j$$

- Το πρόβλημα της εκτέλεσης μιας τέτοιας χρονοβόρας διαδικασίας αντιμετωπίζεται εύκολα με χρήση κατάλληλου λογισμικού

Γιατί ανάλυση διακύμανσης; (2)

- Όμως, το πραγματικό πρόβλημα που δημιουργείται με τις συγκρίσεις ανά δύο είναι το εξής:
  - Αν ενδιαφερόμαστε να κάνουμε **c** ανεξάρτητους ελέγχους σε επίπεδο σημαντικότητας $\mathbf{a_{PC}}$ τον καθένα, τότε η πιθανότητα λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης σε έναν τουλάχιστον από αυτούς τους ελέγχους, δηλαδή η πιθανότητα στους **c** ελέγχους να συμβεί τουλάχιστον μια φορά σφάλμα *Τύπου Ι* είναι

$$\boldsymbol{a_{\mathrm{PE}} = 1 - (1 - a_{PC})^{c}}$$

Γιατί ανάλυση διακύμανσης; (3)

- Πιθανότητα σφάλματος *Τύπου Ι* **κατά σύγκριση**
  - Το επίπεδο σημαντικότητας $\mathbf{a_{PC}}$ καθενός από τους **c** ανεξάρτητους ελέγχους που ενδιαφερόμαστε να κάνουμε
- Πιθανότητα *Τύπου Ι* **κατά πείραμα**
  - Η πιθανότητα $\mathbf{a_{PE}}$ λανθασμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης σε έναν τουλάχιστον από **c** ελέγχους (δηλαδή η πιθανότητα σε **c** ελέγχους να συμβεί τουλάχιστον μια φορά σφάλμα *Τύπου Ι*) $\boldsymbol{a_{PE} = 1 - (1 - a_{PC})^c}$

- Υπενθύμιση:
  - Σφάλμα ***Τύπου Ι***: Η λανθασμένη απόρριψη της $\mathbf{H_0}$

Γιατί ανάλυση διακύμανσης; (4)

- Είναι φανερό ότι η $\mathbf{a_{PE}}$ αυξάνεται ραγδαία με τον αριθμό των ελέγχων **c**
- Αυτό συμβαίνει τόσο στην περίπτωση ανεξάρτητων όσο και στην περίπτωση μη ανεξάρτητων ελέγχων
- Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται ως ***πρόβλημα των πολλαπλών συγκρίσεων***
- Η **ανάλυση διακύμανσης**, που αποτελεί μια <u>μέθοδο στατιστικού ελέγχου αποφάσεων που αναφέρονται σε περισσότερους από δύο πληθυσμούς</u>, απαντάει στο πρόβλημα της σύγκρισης περισσότερων των δύο μέσων

Ανάλυση διακύμανσης

- Έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας **α** της μηδενικής υπόθεσης

$$\mathbf{H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k}$$

έναντι της εναλλακτικής

$$\mathbf{H_1: \mu_i \neq \mu_j,\ \text{για ένα τουλάχιστον ζεύγος}\ (i, j)}$$

- Δηλαδή, σύγκριση των μέσων τιμών $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, **k>2** πληθυσμών με έναν μόνο αντί για πολλαπλούς ελέγχους

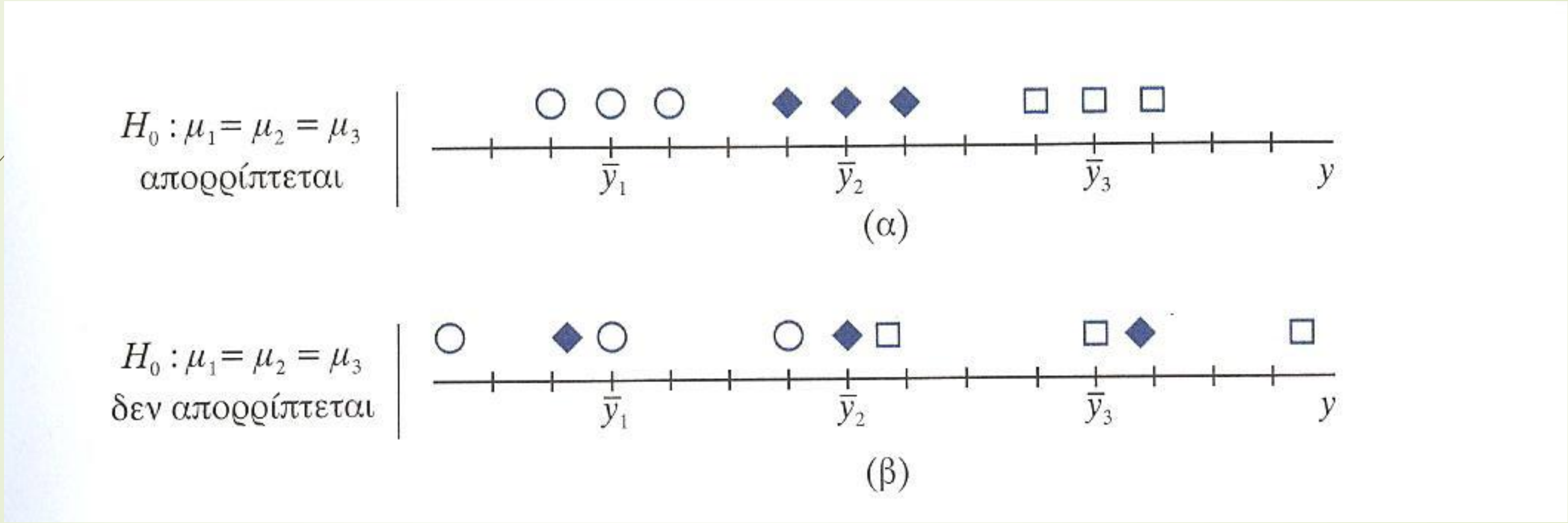
Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (1)

- Οι διαφορές στους δειγματικούς μέσους (στους μέσους των επεμβάσεων) κρίνονται στατιστικά σημαντικές ή όχι, σε σχέση με τις μεταβλητότητες (διακυμάνσεις) εντός των δειγμάτων

Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (2)

- Έτσι, ενώ σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις δειγμάτων οι αντίστοιχοι δειγματικοί μέσοι μπορεί να είναι ίσοι
  1. όταν οι μεταβλητότητες εντός των δειγμάτων είναι μικρές, οι διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στους δειγματικούς μέσους κρίνονται στατιστικά σημαντικές και απορρίπτεται η $\mathbf{H_0}$
  2. όταν οι μεταβλητότητες εντός των δειγμάτων είναι μεγάλες, οι διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στους δειγματικούς μέσους δεν κρίνονται στατιστικά σημαντικές και δεν απορρίπτεται η $\mathbf{H_0}$

Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (3)



Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (4)

- Αυτή η ιδέα τεχνικά υλοποιείται ως εξής: εκτιμάμε την κοινή διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$, των $\boldsymbol{k}$ κανονικών πληθυσμών με δύο τρόπους:
  - **1ος τρόπος:** εκτιμάμε την (άγνωστη) κοινή διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$, των $\boldsymbol{k}$ κανονικών πληθυσμών με το σταθμισμένο μέσο των $\boldsymbol{k}$ δειγματικών διακυμάνσεων $\boldsymbol{s_w^2}$, δηλαδή με το σταθμισμένο μέσο των διακυμάνσεων εντός των δειγμάτων
$$\boldsymbol{s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2+\cdots+(n_k-1)s_k^2}{n-k}}$$
- Αυτή η εκτίμηση είναι μια «λογική και καλή» εκτίμηση της από κοινού διακύμανσης $\boldsymbol{\sigma^2}$, ανεξάρτητα αν οι $\boldsymbol{k}$ μέσοι $\boldsymbol{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}$ είναι ίσοι ή όχι, δηλαδή ανεξάρτητα αν η $\boldsymbol{H_0}$ είναι ή όχι αληθής

Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (5)

- <u>**2ος τρόπος:**</u> εκτιμάμε την (άγνωστη) κοινή διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2}$, των ***k*** κανονικών πληθυσμών με τη διακύμανση (μεταξύ) των ***k*** δειγματικών μέσων

$$s_b^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j\left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2}{k-1}$$

- όπου $\bar{y}$ είναι ο γενικός μέσος (ο μέσος όλων των ***n*** παρατηρήσεων) και $\bar{y}_j$ είναι ο μέσος του ***j*** δείγματος

- Αυτή η εκτίμηση είναι «λογική» και περιμένουμε να είναι περίπου ίση με την s_w^2, αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, γιατί τότε τα ***k*** δείγματα θα προέρχονται από τον ίδιο κανονικό πληθυσμό, $\boldsymbol{N(\mu, \sigma^2)}$

Η βασική ιδέα της ανάλυσης της διακύμανσης (6)

- Αν επομένως η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, αναμένουμε ο λόγος $\frac{s_b^2}{s_w^2}$ να είναι κοντά στο ένα, ενώ αν δεν είναι αληθής, περιμένουμε να αυξάνεται γιατί θα αυξάνεται ο αριθμητής που ενσωματώνει και τη μεταβλητότητα των δειγματικών μέσων

- Έτσι, ως κριτήριο / στατιστική συνάρτησης ελέγχου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λόγο

$$\frac{\boldsymbol{\mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\acute{\upsilon}\ \tau\omega\nu\ \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau\omega\nu}}{\boldsymbol{\mu\varepsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \tau\omega\nu\ \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau\omega\nu}}$$

Προϋποθέσεις για την εφαρμογή ελέγχων ανάλυσης διακύμανσης

1. Οι πληθυσμοί από τους οποίους προέρχονται τα δείγματα είναι
   i. **κανονικοί**
   ii. **με κοινή διακύμανση**
2. Τα *πειραματικά σχέδια*, δηλαδή οι υποθέσεις που κατά περίπτωση αφορούν τον τρόπο λήψης των παρατηρήσεων

Εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (1)

- Πρόκειται για το πιο απλό πειραματικό σχέδιο
- Εργαζόμαστε με ***k* > 2 ανεξάρτητα τυχαία δείγματα**, ένα από κάθε πληθυσμό (ή αλλιώς ένα από κάθε στάθμη του παράγοντα ή ένα από κάθε επέμβαση)
- Αποτελεί ευθεία γενίκευση του σχεδίου που εφαρμόσαμε για τον έλεγχο των μέσων μ_1 και μ_2, δύο πληθυσμών με **δύο ανεξάρτητα δείγματα**

Υποθέσεις / παραδοχές στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (1)

- Οι υποθέσεις που ισχύουν είναι οι εξής:
  1. Τα ***k*** δείγματα (***k* > 2**) είναι **ανεξάρτητα τυχαία δείγματα** (όλες οι παρατηρήσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες)
  2. Κάθε δείγμα προέρχεται από **κανονικό πληθυσμό**
  3. Οι ***k*** πληθυσμοί έχουν **κοινή διακύμανση** (ομοσκεδαστικότητα)

Υποθέσεις / παραδοχές στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (2)

- Αν $\boldsymbol{\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_j, j = 1, 2, \ldots, k, i = 1, 2, \ldots, n_i}$, η απόκλιση της $\boldsymbol{\Upsilon_{ij}}$ από τη μέση τιμή $\boldsymbol{\mu_j}$ του πληθυσμού $\boldsymbol{j}$, τότε οι υποθέσεις του εντελώς τυχαιοποιημένου σχεδίου είναι ισοδύναμες με τις εξής:
  1. Τα $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα
  2. $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}} \sim N(0, \sigma^2)$

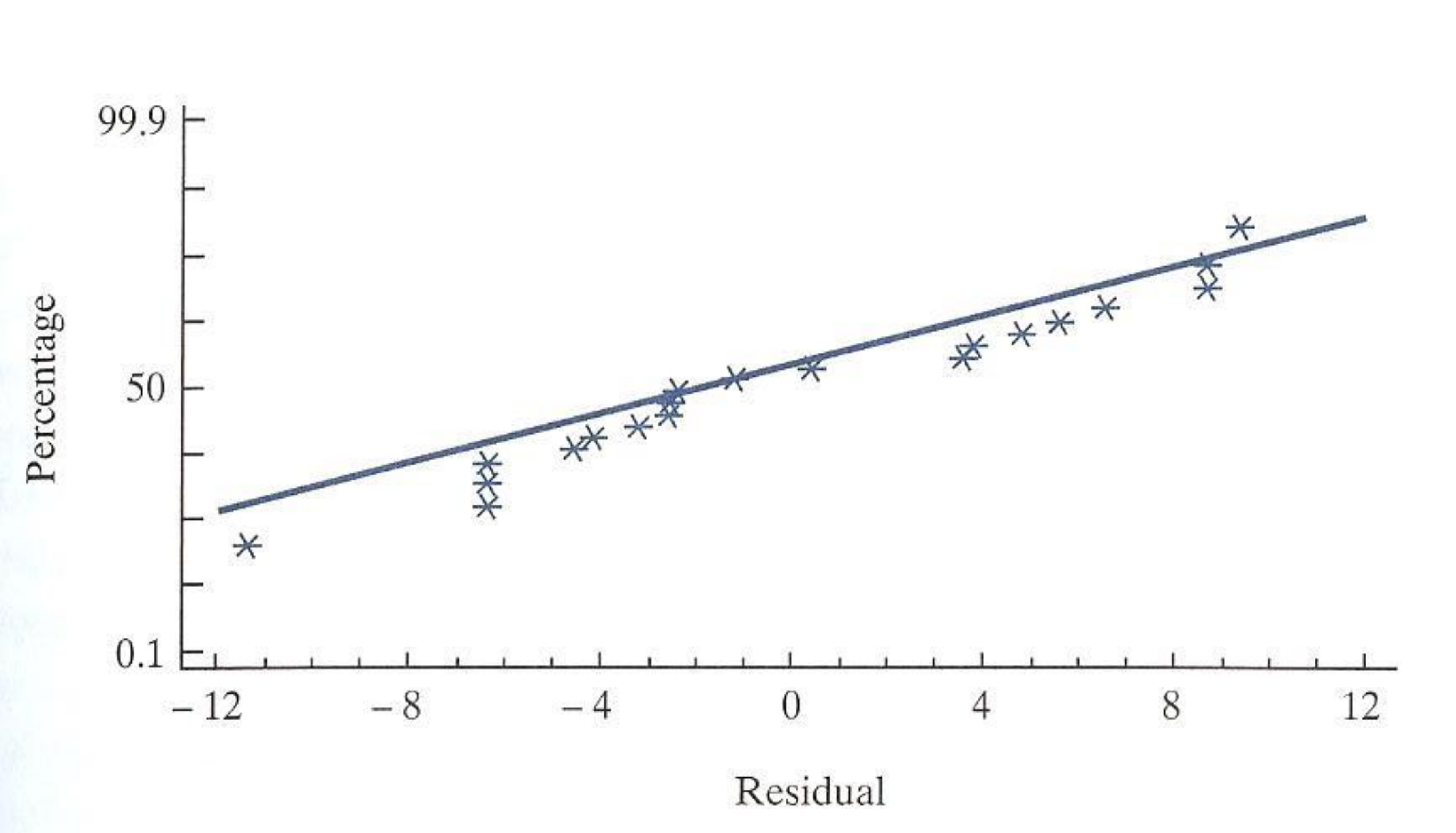
- Τα $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ ονομάζονται **σφάλματα / υπόλοιπα (residuals)** και εκφράζουν το πειραματικό σφάλμα, δηλαδή τη μεταβλητότητα που δεν εξηγείται από τις επεμβάσεις

Κανονικό διάγραμμα πιθανότητας για τα υπόλοιπα (1)

- Αν τα σημεία που δημιουργούνται κατανέμονται με τυχαίο τρόπο γύρω από μία ευθεία γραμμή, τότε έχουμε μια καλή ένδειξη ότι η **υπόθεση της κανονικότητας των σφαλμάτων ικανοποιείται** (υπόθεση 2)

- Με άλλα λόγια, αν δεν φαίνεται να ακολουθούν κάποιο καμπυλόγραμμο πρότυπο, έχουμε μια καλή ένδειξη ότι τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή

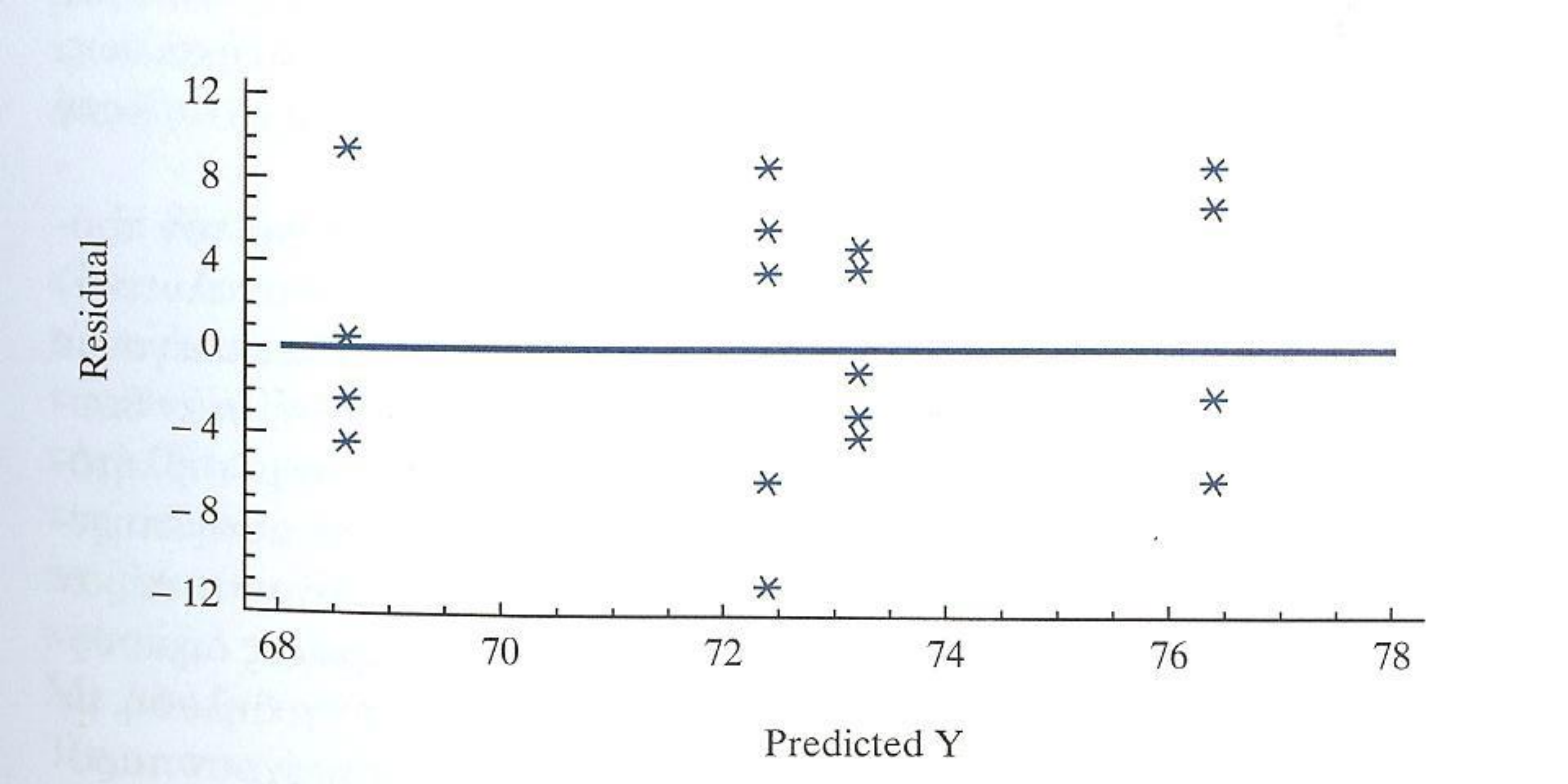
Κανονικό διάγραμμα πιθανότητας για τα υπόλοιπα (2)



Διάγραμμα υπολοίπων (1)

- Στον οριζόντιο άξονα σημειώνονται οι δειγματικοί μέσοι και στον κατακόρυφο τα αντίστοιχα παρατηρούμενα υπόλοιπα για τις παρατηρήσεις κάθε δείγματος
- Αν για όλα τα δείγματα τα αντίστοιχα σημεία είναι περίπου το ίδιο διασκορπισμένα και κατανέμονται ομοιόμορφα (τυχαία) γύρω από την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το 0, έχουμε μια καλή ένδειξη ότι τα υπόλοιπα έχουν κοινή διακύμανση

Διάγραμμα υπολοίπων (2)



Αλληλεπίδραση δύο παραγόντων

- Η επίδραση του ενός παράγοντα εξαρτάται από τη στάθμη του άλλου, ή αλλιώς, η επίδραση του ενός παράγοντα διαφοροποιείται ανάλογα με τη στάθμη του άλλου
- Δηλαδή, η αλληλεπίδραση εκφράζει την επίδραση του ενός παράγοντα στη συμπεριφορά του άλλου
- Αν δεν υπάρχει αλληλεπίδραση, οι δύο παράγοντες συμπεριφέρονται ανεξάρτητα και επιδρούν προσθετικά / ανεξάρτητα

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (με έναν παράγοντα) (1)

- $\mathbf{H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k}$ ή ο παράγοντας **δεν επιδρά**
- $\mathbf{H_1: \mu_i \neq \mu_j}$ για ένα τουλάχιστον ζεύγος (i, j) ή ο παράγοντας **επιδρά**

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (με έναν παράγοντα) (2)

Πηγή μεταβλητότητας	Β.Ε.	Άθροισμα τετραγώνων SS	Μέσο άθροισμα τετραγώνων MS	Κριτήριο F	Περιοχή απόρριψης
Εκφράζει τη μεταβλητότητα μεταξύ των μέσων των k επεμβάσεων (μεταξύ των μέσων των δειγμάτων)	k-1	(των επεμβάσεων) $SST_r = \sum_j n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2$	(των επεμβάσεων) $\mathrm{MST}_r = \frac{SST_r}{k-1}$	$F_{T_r} = \frac{MST_r}{MSE}$	$F_{T_r} \geq F_{k-1;n-1;a}$
Εκφράζει τη μεταβλητότητα εντός των δειγμάτων (των επεμβάσεων)	n-k	(των σφαλμάτων) $SSE = \sum_{ij}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	(των σφαλμάτων) $MSE = \frac{SSE}{n-k}$		
Ολική	n-1	(ολικό) $SST_{ot} = SST_r + SSE$			

όπου k το πλήθος των επεμβάσεων και n το πλήθος των παρατηρήσεων

Έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης στο εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο (με έναν παράγοντα) (3)

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι
  - $SST_{ot} = \sum_{ij} y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}$ (με n-1 βαθμούς ελευθερίας)
  - $SST_r = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{G^2}{n}$ (με k-1 βαθμούς ελευθερίας)
  - όπου
    - G είναι το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων
    - T_j είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων του δείγματος j
    - n είναι ο αριθμός όλων των δειγμάτων
    - n_j είναι ο αριθμός των δειγμάτων του δείγματος j

Όταν σε έναν έλεγχο ανάλυσης διακύμανσης απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση

- Όταν η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, τι μπορούμε να πούμε για τις διαφορές των μέσων των ***k*** δειγμάτων;
- Διαφέρουν όλοι μεταξύ τους ή μόνο ένας (και ποιος είναι αυτός);
- Το ερώτημα αυτό θέτει και πάλι το **πρόβλημα των πολλαπλών συγκρίσεων**

(1-α)100% διαστήματα εμπιστοσύνης για τον μέσο μιας επέμβασης και για τη διαφορά των μέσων δύο επεμβάσεων

- Σε περιπτώσεις που υπάρχει προσχεδιασμένο / ειδικό ενδιαφέρον για κάποια συγκεκριμένη, από τις **k > 2**, μέσες τιμές ή για κάποια από τις $\binom{k}{2}$ διαφορές $\boldsymbol{\mu_i - \mu_j}$, μια λύση είναι να κατασκευάσουμε ένα **(1-α)100%** διάστημα εμπιστοσύνης για τη συγκεκριμένη μέση τιμή που μας ενδιαφέρει και ένα **(1-α)100%** διάστημα εμπιστοσύνης για τη συγκεκριμένη διαφορά που μας ενδιαφέρει, χρησιμοποιώντας την **κατανομή t**

(1-α)100% διάστημα εμπιστοσύνης για έναν μέσο μ_i (κανονικός πληθυσμός, άγνωστη διακύμανση)

$$\bar{y}_i \pm \frac{s}{\sqrt{n_i}} t_{n-k;a/2}$$

- Το απαιτούμενο **s** για την κατασκευή των διαστημάτων μπορούμε να το υπολογίσουμε ως την **τετραγωνική ρίζα του MSE**, αφού το **MSE** είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της άγνωστης διακύμανσης $\boldsymbol{\sigma^2}$ και μάλιστα υπολογίζεται από όλες τις παρατηρήσεις
- Στην περίπτωση αυτή, για την κρίσιμη τιμή χρησιμοποιούμε **n-k** βαθμούς ελευθερίας
- Επομένως $s = \sqrt{MSE}$ και $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

(1-α)100% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_i - \mu_j$ δύο μέσων

$$\left(\bar{y}_i - \bar{y}_j\right) \pm s\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}\, t_{n-k;a/2}$$

όπου $s = \sqrt{MSE}$ και $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Η μέθοδος Tukey (1)

- Μέθοδος Tukey (HSD test – Honestly Significant Difference test)
  - Διατηρεί την πιθανότητα να συμβεί σφάλμα ***Τύπου Ι κατά πείραμα*** σε προκαθορισμένο επίπεδο
  - Προσφέρει μεγάλη προστασία από σφάλματα *Τύπου Ι* (λανθασμένη απόρριψη της $\mathbf{H_0}$)
  - Είναι συντηρητικός έλεγχος στην ανάδειξη στατιστικά σημαντικών διαφορών

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Η μέθοδος Tukey (2)

- Κατασκευάζουμε για όλες τις διαφορές **μ_i – μ_j**, **(1-a)100%** ταυτόχρονα διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιώντας την κατανομή **studentized range** $\boldsymbol{Q_{k;nk-k}}$ και οι έλεγχοι της σημαντικότητας γίνονται με αυτά τα διαστήματα
- Η κατανομή $\boldsymbol{Q_{k;nk-k}}$ είναι η κατανομή της τ.μ. **R/S** , όπου **R** είναι το εύρος **k** κανονικών τ.μ. και **S** μια εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισής τους με **u** βαθμούς ελευθερίας

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Η μέθοδος Tukey (3)

- Αποδεικνύεται ότι αν $\overline{Y}_i, j = 1, 2, \ldots, k$ είναι οι k δειγματικοί μέσοι σε ένα εντελώς τυχαιοποιημένο σχέδιο με **k** στάθμες, όπου για κάθε στάθμη έχουμε τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων $n = n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, τότε τα $\binom{k}{2}$ διαστήματα $\overline{Y}_i - \overline{Y}_j \pm Q_{k;nk-k}\sqrt{\frac{MSE}{n}}$ είναι **ταυτόχρονα** (1-α)100% διαστήματα εμπιστοσύνης για τις διαφορές $\mu_i - \mu_j$

- Απορριπτική περιοχή για τους ανά δύο ελέγχους είναι η $\left|\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\right| \geq Q_{k;nk-k;a}\sqrt{\frac{MSE}{n}} \Leftrightarrow \frac{\left|\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\right|}{\sqrt{MSE/n}} \geq Q_{k;nk-k;a}$

Η μέθοδος Tukey – Παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε να συγκρίνουμε ανά δύο τους μέσους μ_1, μ_2 και μ_3 έχοντας τα εξής δεδομένα:
  - $\overline{y_1} = 273.83$, $\overline{y_2} = 204.5$, $\overline{y_3} = 396.67$, **k=3, n=6 και** $\sqrt{\frac{MSE}{n}} = 40,38$

- Εφαρμόστε τη μέθοδο Tukey με διάστημα εμπιστοσύνης 95%

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Η μέθοδος Tukey (4)

1. Αν τα αποτελέσματα ενός ελέγχου πολλαπλών συγκρίσεων φαίνονται διφορούμενα / ασαφή μπορούμε να κάνουμε τα εξής:
   - Επανάληψη της δειγματοληψίας με μεγαλύτερα μεγέθη δειγμάτων
   - Μείωση της πιθανότητας να συμβεί σφάλμα *Τύπου ΙΙ*
   - Χρησιμοποίηση κάποιου άλλου πιο ισχυρού ελέγχου πολλαπλών συγκρίσεων (με το ανάλογο κόστος στην πιθανότητα σφάλματος *Τύπου Ι*)
2. Αν τα ***k*** δείγματα **δεν είναι του ίδιου μεγέθους**, η μέθοδος Tukey μπορεί να εφαρμοστεί με κατάλληλη προσαρμογή στον υπολογισμό των ορίων των διαστημάτων
   - Αντί $\sqrt{\frac{\mathbf{MSE}}{n}}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sqrt{\frac{\mathbf{MSE}}{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{n_i}+\frac{\mathbf{1}}{n_j}\right)}$

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Η μέθοδος Newman – Keuls

- Η μέθοδος Newman – Keuls (Student – Newman – Keuls / SNK) είναι ανάλογη με τη διαδικασία Tukey με μια διαφορά
  - Η κρίσιμη τιμή δεν είναι ίδια για όλους τους ανά δύο ελέγχους

Έλεγχοι πολλαπλών συγκρίσεων – Άλλες μέθοδοι

1. Έλεγχος Scheffe ή S – Method
   - Διατηρεί την πιθανότητα σφάλματος *Τύπου I* σε προκαθορισμένο επίπεδο
   - Έχει σχεδιασθεί για γραμμικές αντιθέσεις
2. Έλεγχος Dunn (Bonferroni correction) (για μικρό αριθμό συγκρίσεων)
   - Χειρίζεται την πιθανότητα σφάλματος *Τύπου I* (a_{PE}) κατά πείραμα ως εξής:
     - Την προκαθορίζει και την κατανέμει (όχι απαραίτητα εξίσου) στις ανά δύο συγκρίσεις που θα γίνουν
3. Έλεγχος ελάχιστης σημαντικής διαφοράς
   - Ο μόνος που δεν λαμβάνει υπόψη το σφάλμα *Τύπου I κατά πείραμα*
   - Οι συγκρίσεις πρέπει να είναι λίγες και να έχει προηγηθεί έλεγχος ανάλυσης διακύμανσης της μηδενικής υπόθεσης και αυτή να έχει απορριφθεί

Παράδειγμα 1 (1)

- Ένας φοιτητής, στο πλαίσιο της πτυχιακής του εργασίας, προκειμένου να συγκρίνει τέσσερα είδη (Α1, Α2, Α3, και Α4) πρόσθετης ύλης ζωοτροφών που χρησιμοποιείται για αύξηση του βάρους νεογέννητων χοίρων, σχεδίασε και εκτέλεσε το εξής πείραμα
- Επέλεξε 20 νεογέννητους χοίρους και με μια τυχαία διαδικασία αντιστοίχισε σε 5 από αυτούς την πρόσθετη ύλη Α1, σε άλλους 5 την Α2, σε άλλους 5 την Α3 και σε άλλους 5 την Α4
- Δημιούργησε έτσι 4 ομάδες των 5 χοίρων η κάθε μια
- Αφού χορήγησε για τρεις μήνες στους χοίρους κάθε ομάδας τροφή με την αντίστοιχη πρόσθετη ύλη, κατέγραψε την αύξηση του βάρους κάθε χοίρου (σε κιλά)
- Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% υποστηρίζουν αυτά τα πειραματικά δεδομένα ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη μέση αύξηση του βάρους των νεογέννητων χοίρων που να οφείλονται στα τέσσερα είδη πρόσθετης ύλης ζωοτροφών;

Παράδειγμα 1 (2)

A1	A2	A3	A4
81	78	72	85
66	66	70	70
78	69	78	83
76	64	77	74
61	66	69	70

Παράδειγμα 2

- Ένας μεταπτυχιακός φοιτητής στο πλαίσιο μιας εργαστηριακής άσκησης διερεύνησε την περιεκτικότητα σε σωματιδιακές προσμείξεις ενός υγρού φαρμακευτικού σκευάσματος που χορηγείται ενδοφλεβίως σε ταύρους και παράγεται από τρεις διαφορετικές εταιρίες Α1, Α2 και Α3
- Συγκεκριμένα, έλεγξε 6 σκευάσματα από κάθε εταιρία (τυχαία επιλεγμένα) και κατέγραψε τον αριθμό σωματιδίων με διάμετρο μεγαλύτερη των 5 microns ανά λίτρο
- Οι μετρήσεις που πήρε δίνονται στον παρακάτω Πίνακα

		Αριθμός σωματιδίων (ανά λίτρο)					
Εταιρία παραγωγής	Α1	255	264	342	331	234	217
	Α2	105	288	98	275	221	240
	Α3	577	515	214	413	401	260

- Σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, υποστηρίζουν αυτά τα δεδομένα ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των σκευασμάτων των τριών εταιριών ως προς τη μέση περιεκτικότητά τους σε σωματιδιακές προσμείξεις;