

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ Ι

Βασικές συνεχείς κατανομές

Κανονική (Gaussian) κατανομή

- Η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής
 1. Πολλές τ.μ. περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή ή περιγράφονται από κατανομές που μπορούν να προσεγγισθούν από την κανονική κατανομή
 2. Οι Ιδιότητες της κανονικής κατανομής αξιοποιούνται στη στατιστική συμπερασματολογία (ουσιαστικά η κανονική κατανομή αποτελεί το θεμέλιο της στατιστικής συμπερασματολογίας)

Κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ

- Συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$
- Έστω X τ.μ. με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Για την X ισχύουν τα εξής:

- Συνάρτηση πυκνότητας:

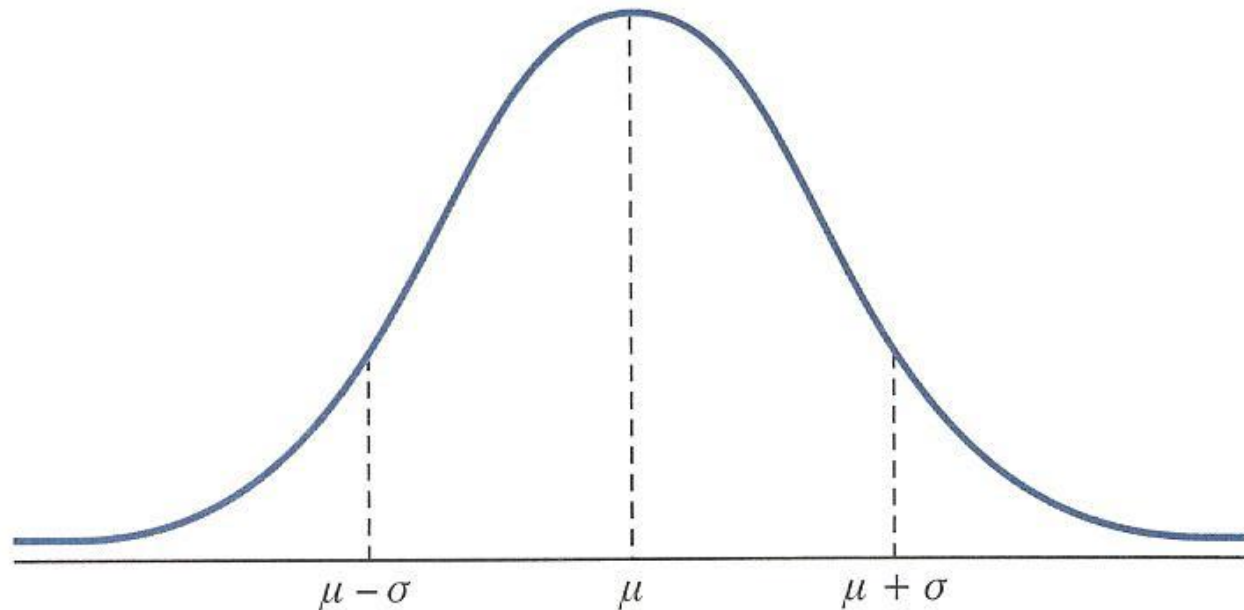
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty \leq x \leq +\infty$$

- Μέση τιμή: $E(X) = \mu$
- Διακύμανση: $Var(X) = \sigma^2$

Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (1)

- Συμμετρική
- Η μέση τιμή της και η διάμεσός της ταυτίζονται
- Η κορυφή της ταυτίζεται με τη μέση τιμή και τη διάμεσο
- Στη θέση $x = \mu$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή ίση με $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0.399}{\sigma}$
- Στις θέσεις $x = \mu - \sigma$ και $x = \mu + \sigma$ παρουσιάζει σημεία καμπής

Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (2)



Οι θέσεις των σημείων καμπής και της κορυφής της κανονικής καμπύλης

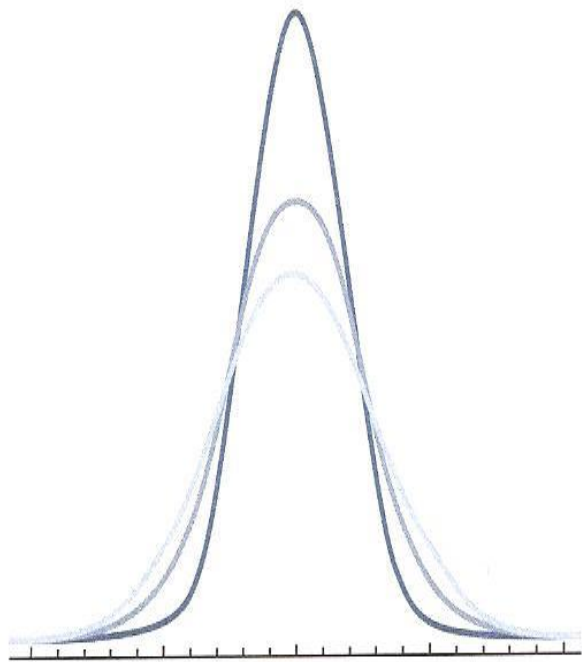
Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (3)

- Η αλλαγή της τιμής της μέσης τιμής μ προκαλεί μόνο μετατοπίσεις της κανονικής καμπύλης σε μια νέα θέση

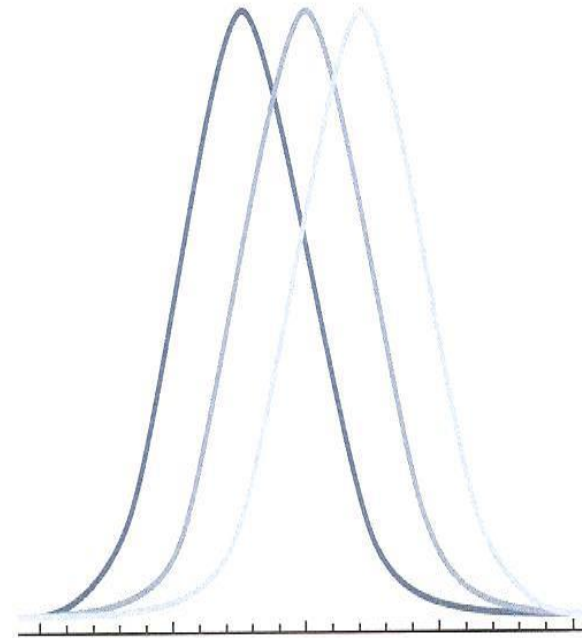
Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (4)

- Όσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση σ , τόσο ψηλότερη και τόσο πιο στενή είναι η κανονική καμπύλη, δηλαδή, τόσο μικρότερο είναι το διάστημα στο οποίο, πρακτικά, εκτείνεται η κατανομή

Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (5)



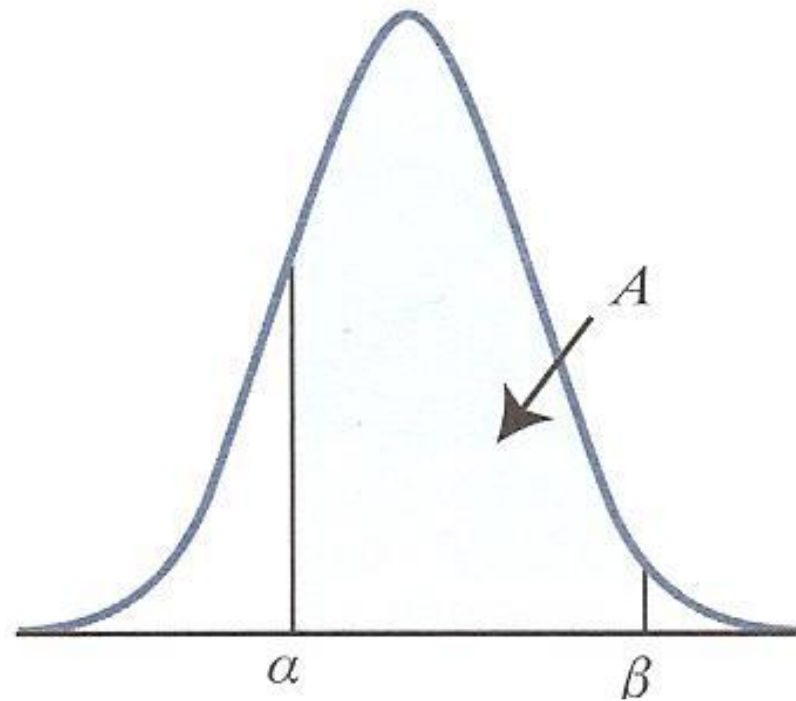
Ίδια μέση τιμή – διαφορετική τυπική απόκλιση



Ίδια τυπική απόκλιση – διαφορετική μέση τιμή

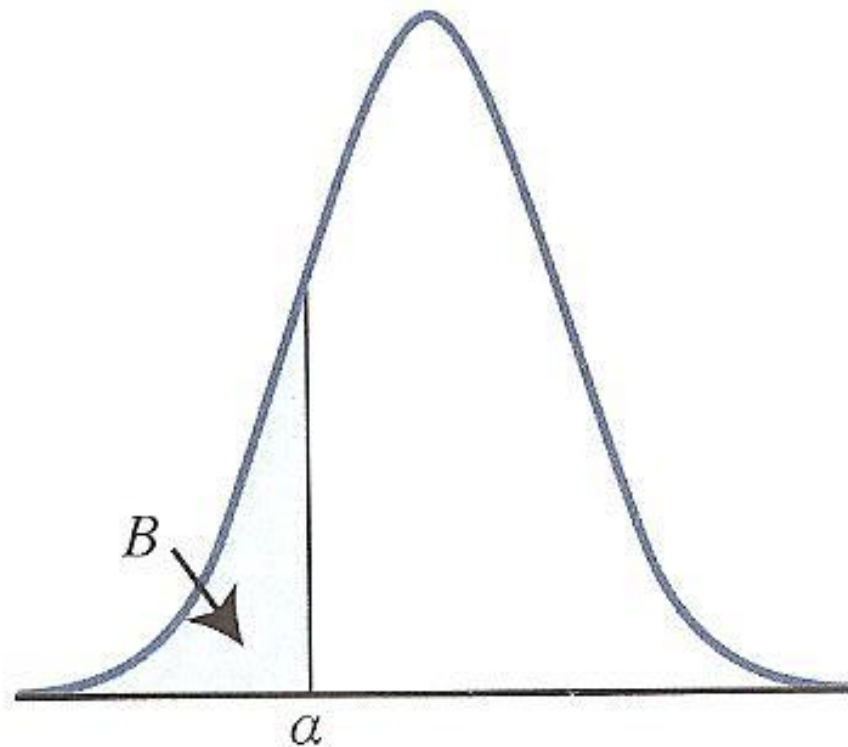
Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (6)

- $P(a \leq X \leq \beta)$



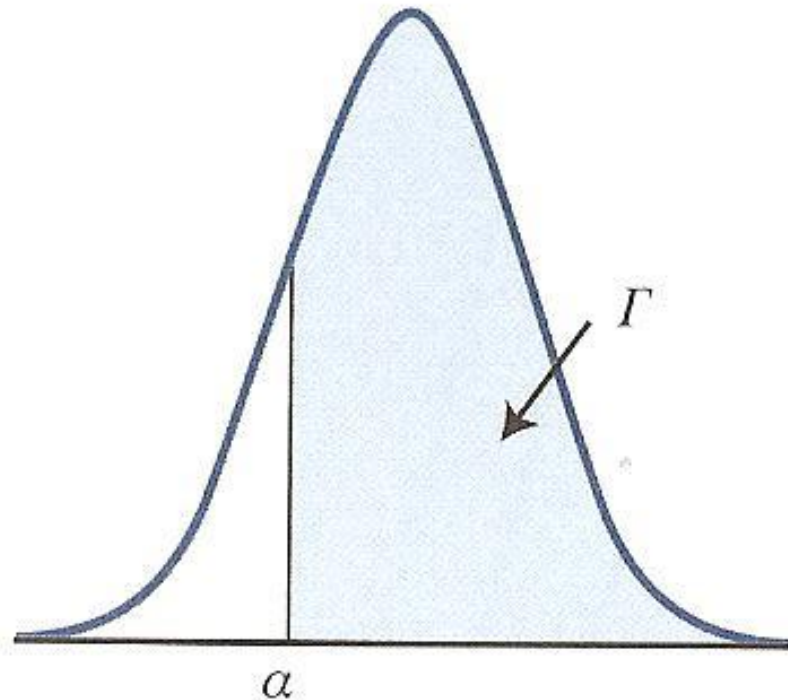
Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (7)

- $P(X \leq a)$



Ιδιότητες της γραφικής παράστασης της κανονικής κατανομής (8)

- $P(X \geq a)$



Τυποποιημένη κανονική κατανομή

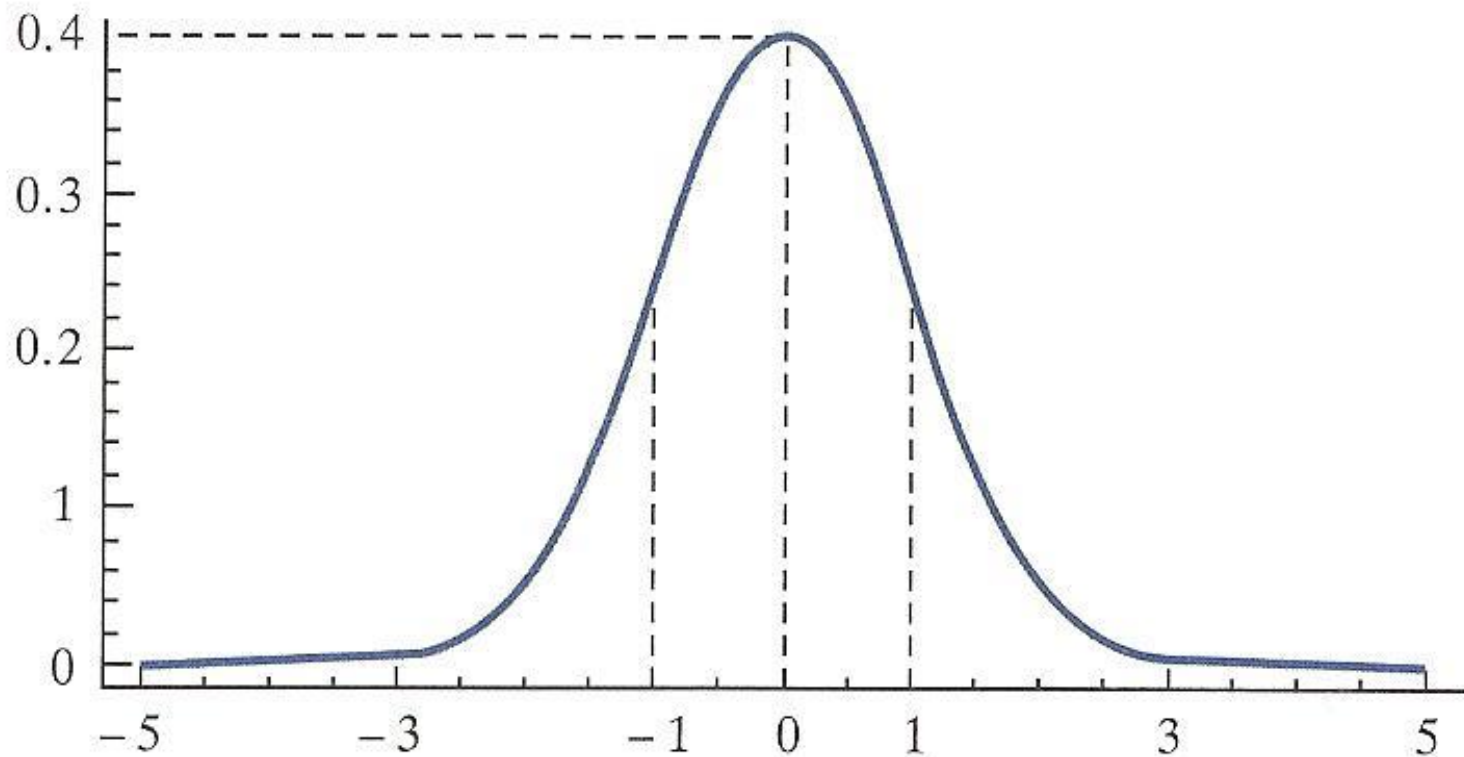
- Κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=0$ και διακύμανση $\sigma^2=1$
- Συμβολίζεται με $Z \sim N(0, 1)$
 - Συνάρτηση πυκνότητας:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty \leq z \leq +\infty$$

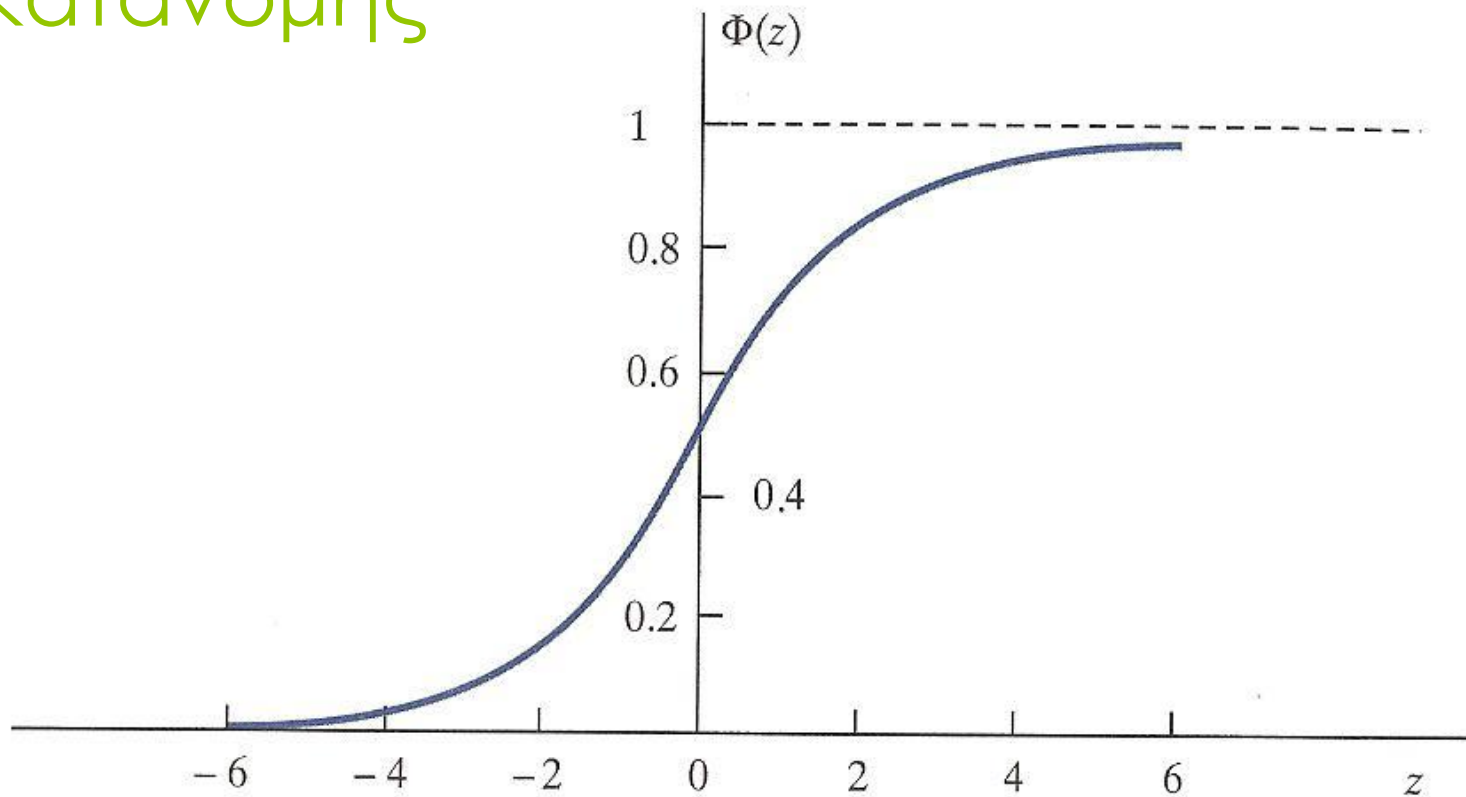
- Συνάρτηση κατανομής:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty \leq z \leq +\infty$$

Η συνάρτηση πυκνότητας $\phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Η συνάρτηση κατανομής $\Phi(z)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

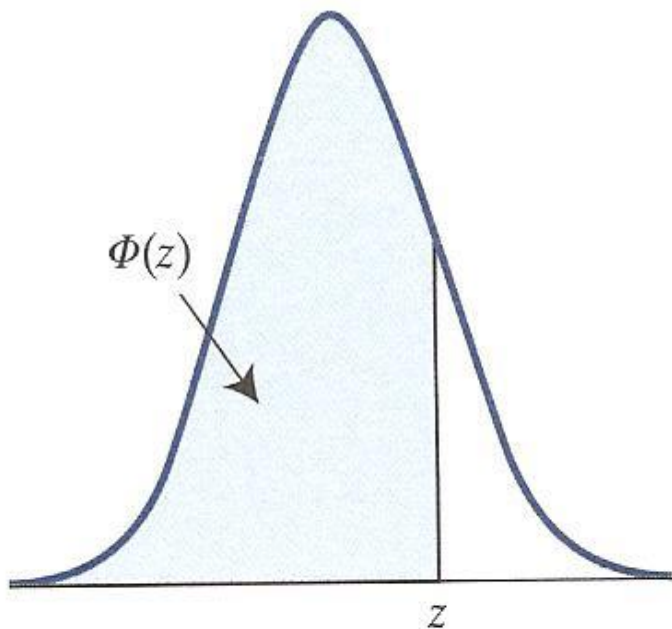


Υπολογισμός πιθανοτήτων τυποποιημένης κανονικής τ.μ. (1)

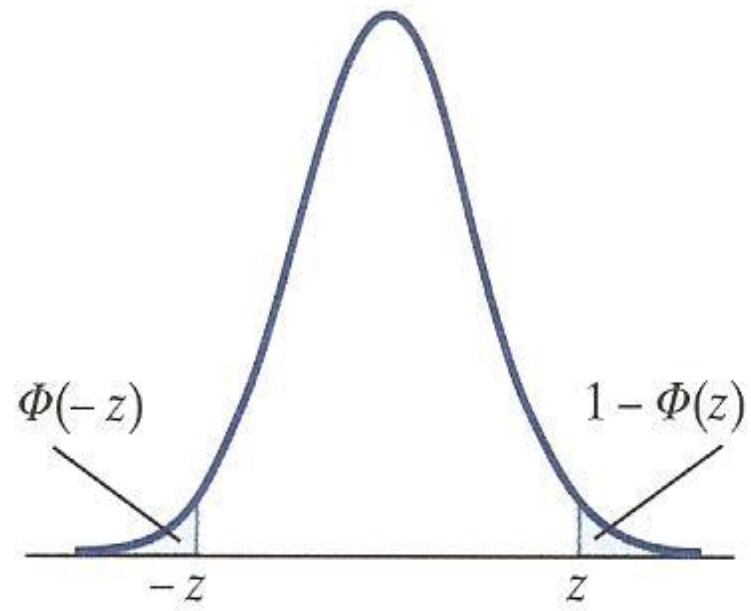
1. $Z \sim N(0, 1)$

- $P(Z \leq z) = \Phi(z)$ και
- $P(Z \leq -z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$
- $P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$
- $P(Z > \alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$
- $P(-a \leq Z \leq a) = 2\Phi(a) - 1$
- Οι τιμές δίνονται από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής ο οποίος δίνει τιμές της $\Phi(z)$ μόνο για μη αρνητικά z

Υπολογισμός πιθανοτήτων τυποποιημένης κανονικής τ.μ. (2)



$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$



$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Υπολογισμός πιθανοτήτων κανονικής τ.μ. (1)

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

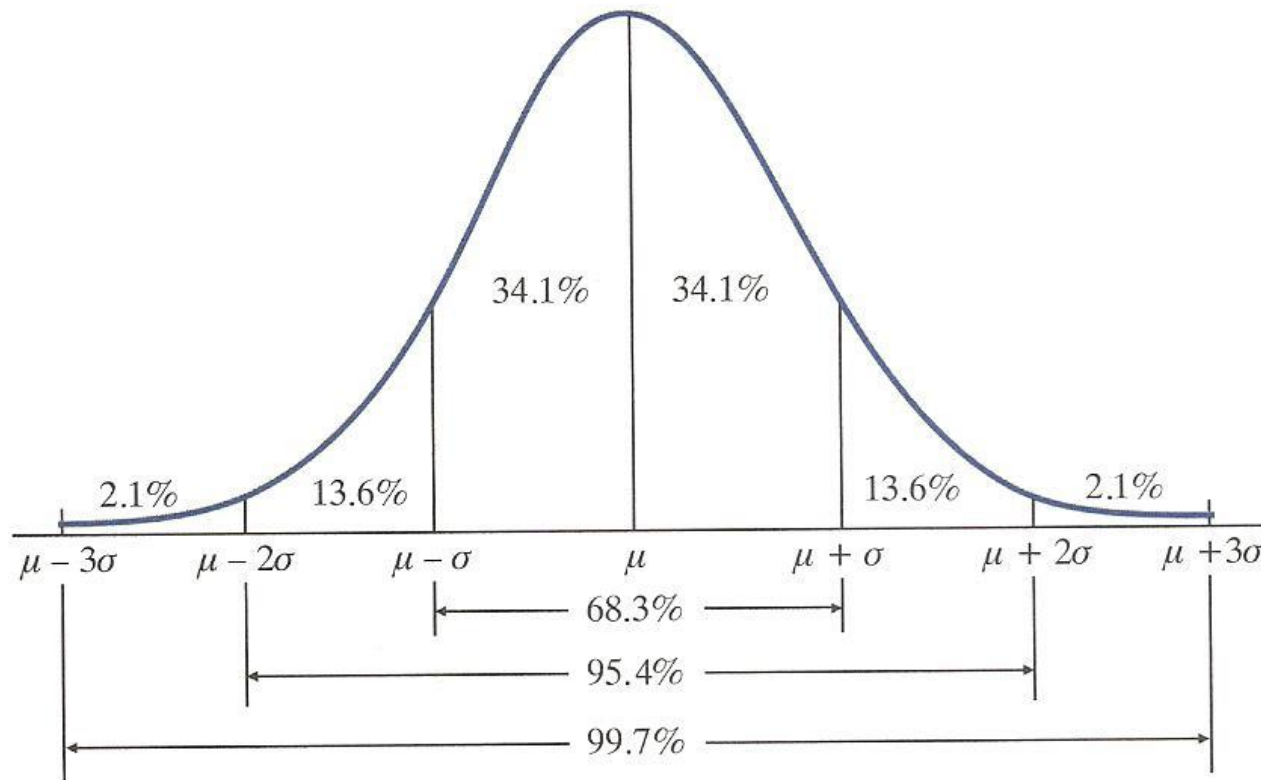
- $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

- $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$

- $P(X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)$

- $P(X \geq \alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$

Υπολογισμός πιθανοτήτων κανονικής τ.μ. (2)



Παράδειγμα 1^ο

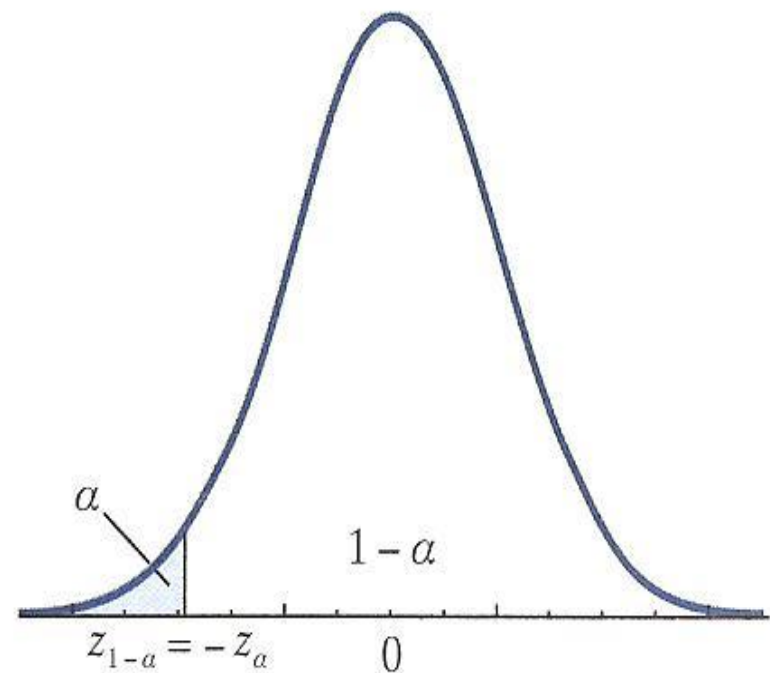
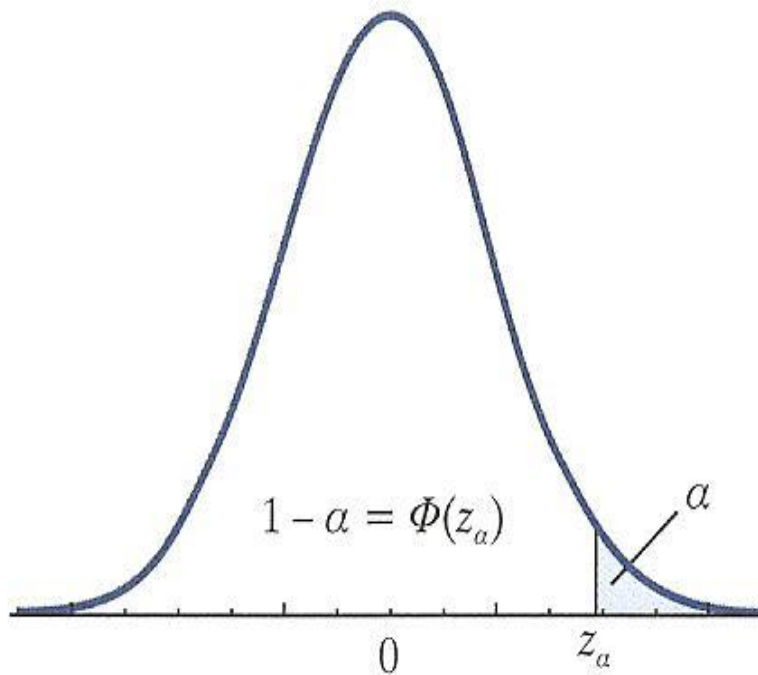
- Έχει παρατηρηθεί ότι ο χρόνος, έστω X , που χρειάζεται ένα ασθενοφόρο για να φτάσει από ένα κέντρο υγείας στο πλησιέστερο περιφερειακό νοσοκομείο, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=17\text{min}$ και τυπική απόκλιση $\sigma=3\text{min}$
- Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος που θα χρειαστεί το ασθενοφόρο για να φτάσει στο περιφερειακό νοσοκομείο να είναι
 1. το πολύ 15min
 2. περισσότερο από 22min
 3. τουλάχιστον 13min και το πολύ 21min

Υπολογισμός ποσοστιμοριών της κανονικής κατανομής (1)

- Η τιμή z της $Z \sim N(0,1)$ για την οποία ισχύει $P(Z > z) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ονομάζεται άνω α -ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και συμβολίζεται με z_α
- Δηλαδή: **$P(Z > z_\alpha) = \alpha$**
- Λόγω συμμετρίας της κατανομής ισχύει:

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

Υπολογισμός ποσοστιμορίων της κανονικής κατανομής (2)



Παράδειγμα 2^ο

- Οι υποψήφιοι για εγγραφή σε ένα ΜΠΣ υποβάλλονται σε ένα τεστ
- Το τεστ έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε οι βαθμοί των υποψηφίων στο τεστ να κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή 300 και τυπική απόκλιση 60
 1. Αν η πολιτική του Πανεπιστημίου είναι να δέχεται ως φοιτητές το 15% των υποψηφίων με το μεγαλύτερο βαθμό στο τεστ, ποιος είναι ο μικρότερος βαθμός που επιτρέπει την εισαγωγή στο μεταπτυχιακό;
 2. Τι βαθμό πρέπει να πετύχει ένας υποψήφιος στο τεστ για να κατατάσσεται στο 10% των υποψηφίων με το μικρότερο βαθμό στο τεστ;

Παράδειγμα 3^ο

- Μια αυτόματη μηχανή συσκευασίας τροφίμων έχει προγραμματιστεί να συσκευάζει δημητριακά σε συσκευασίες του 1.5Kg
- Έχει παρατηρηθεί ότι η ποσότητα δημητριακών ανά συσκευασία ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=1.5\text{Kg}$ και τυπική απόκλιση $\sigma=0.1\text{Kg}$
 1. Τι ποσοστό των συσκευασιών περιέχει ποσότητα που υπερβαίνει τα 1.6Kg;
 2. Σε τι ποσότητα πρέπει να ρυθμιστεί η μηχανή έτσι ώστε μόνο στο 0.001 των περιπτώσεων η ποσότητα δημητριακών στη συσκευασία να υπερβαίνει τα 1.6Kg;

Γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τ.μ.

- Αν X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ πραγματικοί αριθμοί, τότε η τ.μ.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i + \beta = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + \beta$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση

$$\text{τιμή } \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_n \mu_n + \beta$$

$$\text{και διακύμανση } \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$$

Δειγματικός μέσος ανεξάρτητων κανονικών τ.μ.

- Αν X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε ο δειγματικός μέσος τους είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$