Στατιστική Επιχειρήσεων Ι

Βασικές διακριτές κατανομές

Δοκιμή Bernoulli

- Ένα πείραμα σε κάθε εκτέλεση του οποίου εμφανίζεται ακριβώς ένα από δύο αμοιβαία αποκλειόμενα δυνατά αποτελέσματα
- Το ένα ονομάζεται επιτυχία (1) και το άλλο αποτυχία (0)

Η κατανομή Bernoulli με παράμετρο *p* (1)

- Είναι η κατανομή της δίτιμης τ.μ., έστω *X*, που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli
- Συμβολίζεται με *b*(*p*)

Η κατανομή Bernoulli με παράμετρο *p* (2)

- Ισχύουν τα εξής:
  - $f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{x-1}, x \in \{0,1\}$
  - $\mu = \mathrm{E(X)} = p$
  - $\sigma^2 = Var(X) = p(1-p) = pq$

Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p (1)

- Είναι η κατανομή της τ.μ., έστω X, που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με ίδια πιθανότητα επιτυχίας p
- Συμβολίζεται με $B(n, p)$

Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους *n* και *p* (2)

- Ισχύουν τα εξής:
  - $f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, x \in \{0,1,\dots,n\}$
  - $\mu = \mathrm{E(X)} = np$
  - $\sigma^2 = Var(X) = np(1-p) = npq$

Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους *n* και *p* (3)

- Ισχύουν τα εξής:
  - Πιο πιθανή τιμή
    - $x_0 = [(n+1)p]$, όταν το $(n+1)p$ δεν είναι ακέραιος
    - $x_0 = (n+1)p$ και $x_0' = (n+1)p - 1$ όταν το $(n+1)p$ είναι ακέραιος (υπάρχουν 2 πιο πιθανές τιμές)

Παράδειγμα 1ο

- Μια βιομηχανία κατασκευάζει μεταλλικά ελάσματα για να αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση
- Σύμφωνα με τις προδιαγραφές παραγωγής κάθε τέτοιο έλασμα αντέχει στη συγκεκριμένη καταπόνηση με πιθανότητα 0.8
- Επιλέγουμε τυχαία 9 τέτοια ελάσματα και το ένα μετά το άλλο τα υποβάλλουμε στη συγκεκριμένη καταπόνηση
- Ποια είναι η πιθανότητα να αντέξουν
  1. Το πολύ 2 ελάσματα
  2. Περισσότερα από 7 ελάσματα
  3. Τουλάχιστον 2 ελάσματα
  4. Λιγότερα από 6 και τουλάχιστον 4 ελάσματα

Κατανομή Poisson με παράμετρο λ (1)

- Συμβολίζεται με $P(\lambda)$ και είναι γνωστή ως κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων
- Χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση «διωνυμικών καταστάσεων» όπου ενδιαφέρει ο αριθμός εμφανίσεων σπάνιων ενδεχομένων σε μεγάλους πληθυσμούς (όταν δηλαδή σε κάθε επανάληψη, η πιθανότητα επιτυχίας p είναι πολύ μικρή και ο αριθμός των επαναλήψεων πολύ μεγάλος)

Κατανομή Poisson με παράμετρο λ (2)

- Έστω X τ.μ. με $X \sim P(\lambda)$
- Ισχύουν τα εξής:
  - $f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x \in \{0,1,\ldots,n\}$
  - $\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lambda$
  - $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

Κατανομή Poisson με παράμετρο λ (3)

- Ισχύουν τα εξής:
  - Πιο πιθανή τιμή
  - $x_0 = [\lambda]$, όταν το λ δεν είναι ακέραιος
  - $x_0 = \lambda$ και $x_0' = \lambda - 1$ όταν το λ είναι ακέραιος (υπάρχουν δύο πιο πιθανές τιμές)

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Poisson

- Ο αριθμός των βλαβών μιας μηχανής σε μια ημέρα, εβδομάδα, κλπ
- Ο αριθμός των ατόμων ενός πληθυσμού που ζουν πάνω από 100 έτη
- Ο αριθμός των παιδιών ενός πληθυσμού που θα γίνουν ψηλότερα από 1.95 μέτρα
- Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από μια γραμμή παραγωγής σε ορισμένο χρονικό διάστημα
- Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης (τράπεζα, κατάστημα, κλπ.) σε μια ώρα, ημέρα, εβδομάδα, κλπ
- Ο αριθμός των ελαττωματικών σημείων που υπάρχουν σε συγκεκριμένο μήκος καλωδίου
- κλπ.

Προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson

- Αν $n \to +\infty$ και $p \to 0$ έτσι ώστε $np \to \lambda$ τότε

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, \dots$$

- Άρα: η προσέγγιση της διωνυμικής $B(n, p)$ από την $P(np)$ είναι ικανοποιητική αν $n \geq 10$ και $p \leq \frac{10}{n}$, ώστε η μέση τιμή $\lambda = np$ να παίρνει μέτριες τιμές (μικρότερες του10)

Διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

- Αν X_t είναι ο αριθμός των εμφανίσεων ενός ενδεχομένου σε χρόνο *t* (ή σε μήκος *t* ή σε επιφάνεια *t* ή σε όγκο *t*) τότε κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις η συνάρτηση πιθανότητας της X_t δίνεται από τον τύπο:

$$P(X_t = x) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^x}{x!}, \mathrm{x} = 1,2, \ldots$$

- Η X_T ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λt
- Το λ εκφράζει το μέσο αριθμό των εμφανίσεων του αντικειμένου στη μονάδα του χρόνου (ρυθμός εμφάνισης αντικειμένου)

Παράδειγμα 2ο

- Στο help desk ενός μεγάλου internet provider φτάνουν αιτήματα πελατών με ρυθμό 3 αιτήματα ανά λεπτό
- Ποια είναι η πιθανότητα

1. σε ένα λεπτό να φτάσουν το πολύ 2 αιτήματα
2. σε μισό λεπτό να φτάσουν το πολύ 2 αιτήματα
3. σε 2 λεπτά να φτάσουν το πολύ 4 αιτήματα
4. σε 3 διαφορετικά χρονικά διαστήματα του ενός λεπτού να βρεθούν τουλάχιστον δύο τέτοια διαστήματα σε καθένα από τα οποία να έχουν φτάσει το πολύ 2 αιτήματα

Πολυωνυμική δοκιμή

- Ένα πείραμα σε κάθε εκτέλεση του οποίου εμφανίζεται ακριβώς ένα από $k \geq 2$ αμοιβαία αποκλειόμενα δυνατά αποτελέσματα r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$

Πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, p_1, p_2, \dots, p_k$

- Αν X_i ο αριθμός εμφανίσεων του αποτελέσματος r_i , $i = 1, 2, \dots, k$ σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις μιας πολυωνυμικής δοκιμής, όπου η πιθανότητα p_i εμφάνισης του αποτελέσματος r_i παραμένει σε κάθε επανάληψη σταθερή για όλα τα $i = 1, 2, \dots, k$, τότε

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

$$E(X_i) = np_i, \qquad Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

Παράδειγμα 3ο

- Σύμφωνα με ένα μοντέλο κληρονομικότητας, οι τρεις τύποι απογόνων *A*, *B* και *Γ* που προκύπτουν από μια ορισμένη διασταύρωση πειραματόζωων, βρίσκονται σε αναλογία 9:3:4, αντίστοιχα
- Αν στο πλαίσιο ενός πειράματος προέκυψαν από μια τέτοια διασταύρωση 64 απόγονοι, πόσοι αναμένεται να είναι τύπου *A*, πόσοι τύπου *B* και πόσοι τύπου *Γ*;