Στατιστική Επιχειρήσεων Ι

Τυχαίες μεταβλητές

Τυχαία μεταβλητή X στο δειγματικό χώρο Ω

- Μια πραγματική συνάρτηση που αντιστοιχίζει τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε για κάθε διάστημα πραγματικών αριθμών I, το σύνολο $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in I\}$ να είναι ενδεχόμενο του Ω
- Το σύνολο τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με R_X

Παράδειγμα 1ο

- Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μια τρίτεκνη οικογένεια, που επιλέγεται τυχαία από τα αρχεία του Δήμου Αγρινίου, να έχει ακριβώς ένα αγόρι
- Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος και ποιο το σύνολο τιμών της τ.μ. του αριθμού των αγοριών;

Συνάρτηση κατανομής F μιας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X

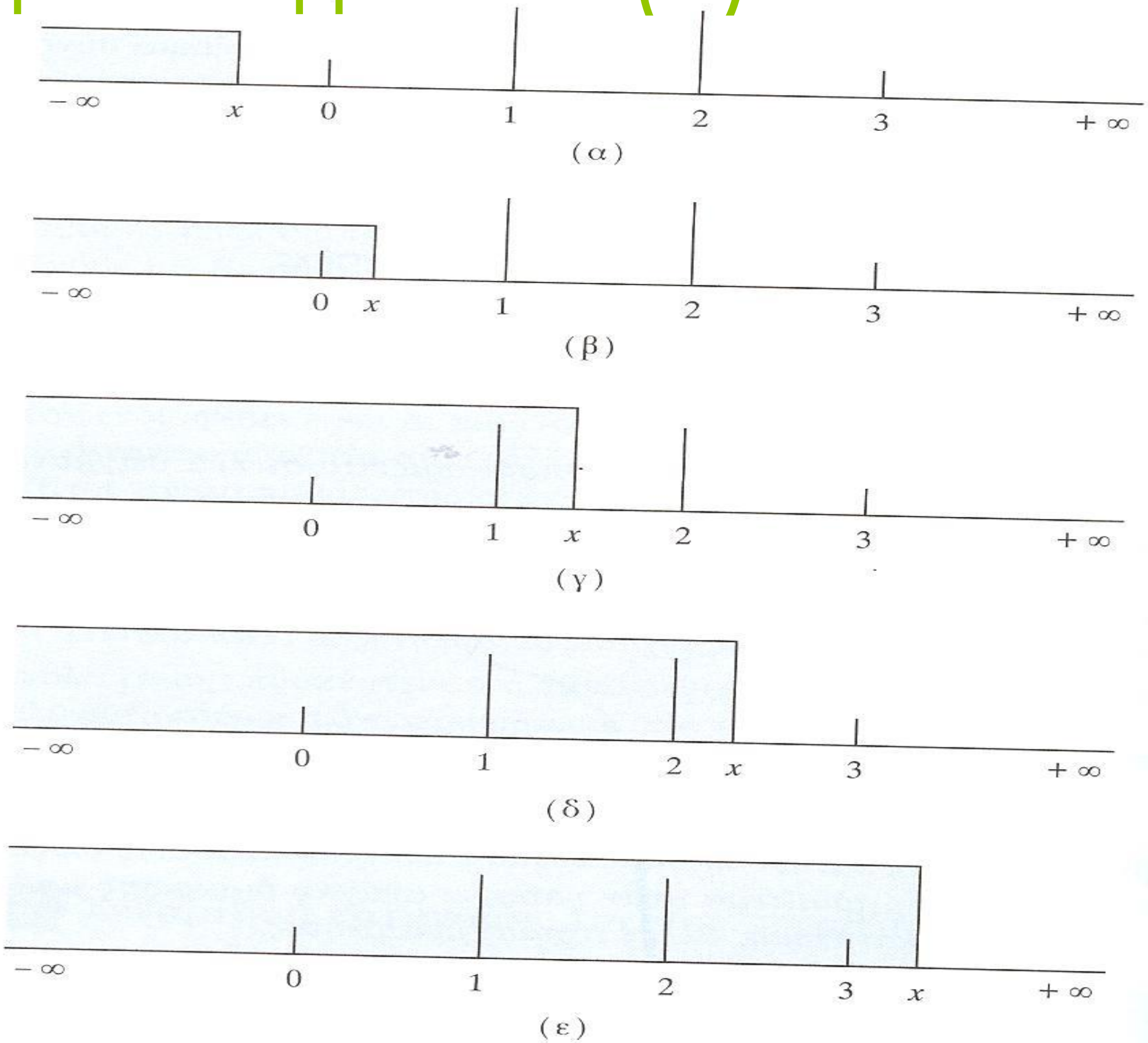
- Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται σε ένα δειγματικό χώρο Ω
- Η πραγματική συνάρτηση F με τύπο:
- $F(x) = P(X \le x) = P(\{\omega \in \Omega): X(\omega) \le x\})$, $-\infty < x < +\infty$

ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** ή **αθροιστική** συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X

Παράδειγμα 2ο (1)

- Στο παράδειγμα 1 ορίσαμε την τ.μ. X η οποία εκφράζει τον αριθμό των αγοριών σε μια τρίτεκνη οικογένεια και βρήκαμε ότι
  - $P(X = 0) = 1/8$
  - $P(X = 1) = 3/8$
  - $P(X = 2) = 3/8$
  - $P(X = 3) = 1/8$
- Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής F της X

Παράδειγμα 2ο (2)

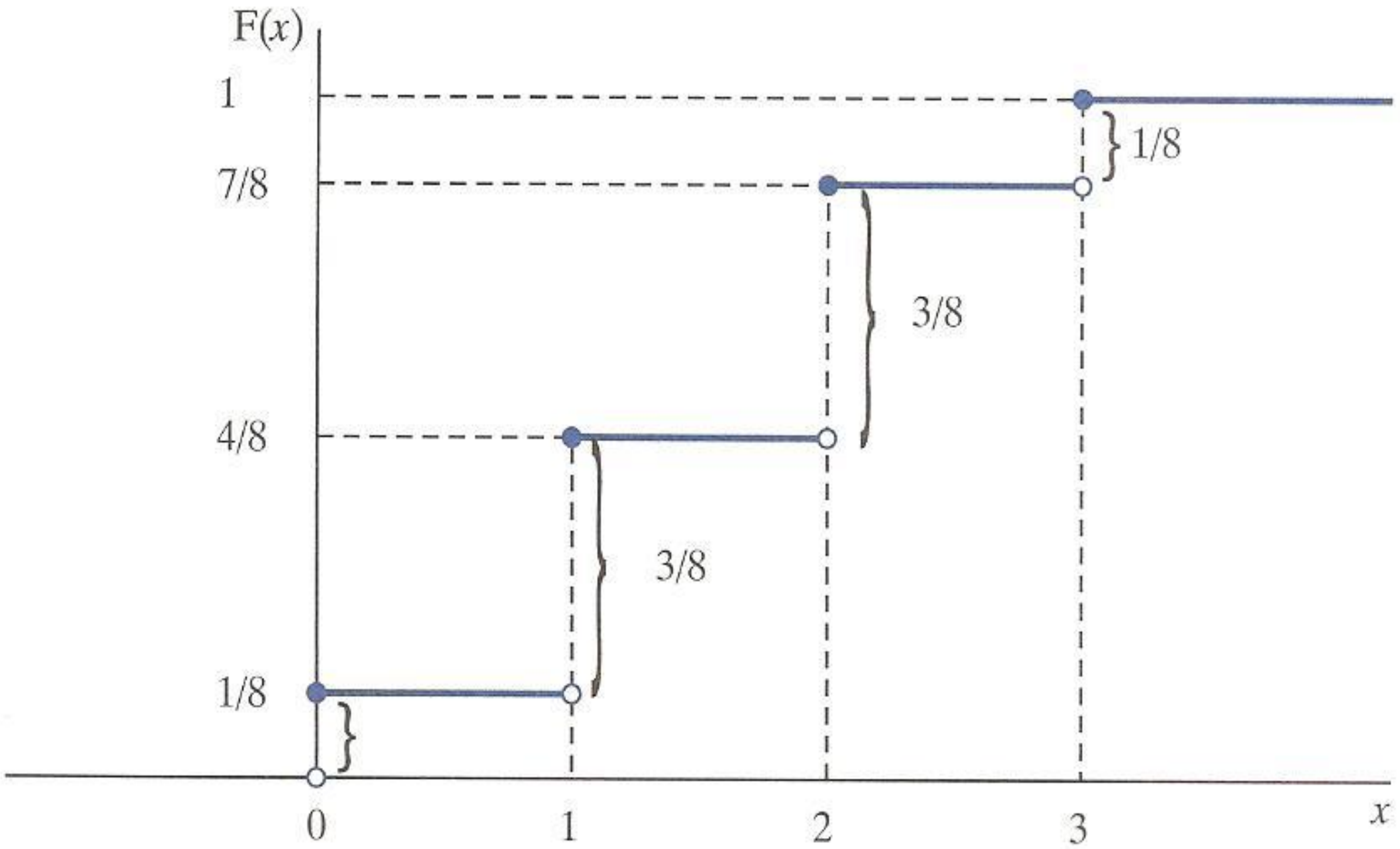


Παράδειγμα 2ο (3)

- Συνοψίζοντας ο τύπος της συνάρτησης κατανομής F της τ.μ. X είναι

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Παράδειγμα 2ο (4)



Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής *F* μιας τ.μ. μεταβλητής *X*

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \Re$
2. Είναι αύξουσα συνάρτηση στο $\Re$
3. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
5. Είναι δεξιά συνεχής, δηλαδή
   $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Υπολογισμός πιθανοτήτων μέσω της F

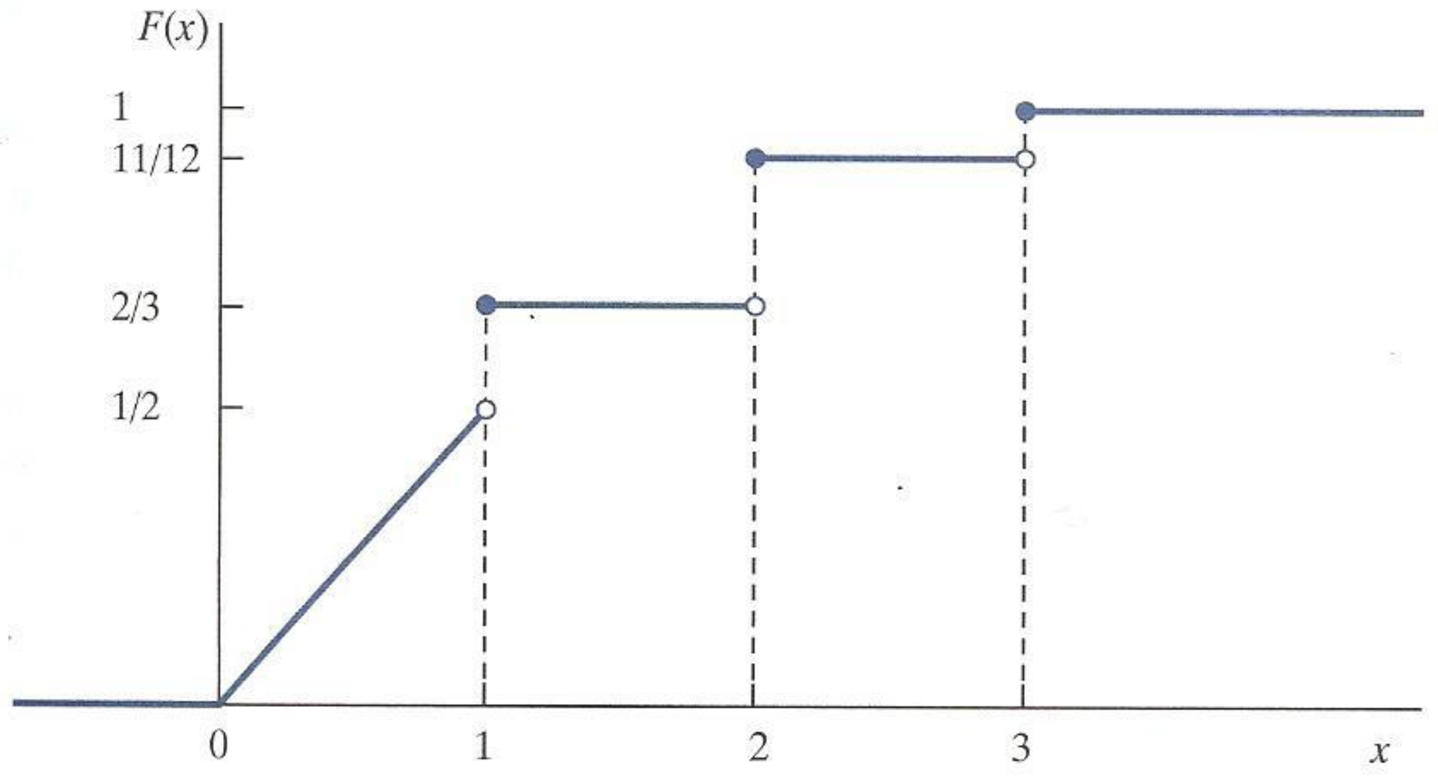
- $P(X \le b) = F(b)$ και $P(X > b) = 1 - F(b)$
- $P(X < b) = F(b-)$ και $P(X \ge b) = 1 - F(b-)$
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
- $P(a < X < b) = F(b-) - F(a)$
- $P(a \le X < b) = F(b-) - F(a-)$
- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-)$
- $P(X = a) = F(a) - F(a-)$

Παράδειγμα 3ο (1)

- Μια τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής F με

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x/2, & 0 \leq x < 1 \\ 2/3, & 1 \leq x < 2 \\ 11/12, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Παράδειγμα 3ο (2)



Παράδειγμα 3ο (3)

- Ας υπολογίσουμε διάφορες πιθανότητες μέσω της *F*
  - $P(X < 3)$
  - $P(X = 1)$
  - $P(X > 5/2)$
  - $P(2 < X \leq 4)$

Διακριτή τυχαία μεταβλητή

- Το σύνολο των τιμών της είναι πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο

Συνάρτηση πιθανότητας *f* διακριτής τ.μ. *X* με πεδίο τιμών R_X

- Έστω *X* μια διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών R_X
- Η πραγματική συνάρτηση *f* με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{για κάθε } x \in R_X \\ 0, & \text{για κάθε } x \in R_X \end{cases}$$

ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας** ή συνάρτηση μάζας πιθανότητας της τ.μ. *X*

Ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας *f* μιας τ.μ. *X* με $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$

1. $f(x) = 0$, για κάθε $x \notin \Re$
2. $f(x_i) \geq 0$, για κάθε $i = 1,2,\ldots$
3. $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N) + \ldots = 1$

Σχέση μεταξύ της *F* και της *f* μιας διακριτής τ.μ.

- Έστω μια διακριτή τ.μ. X με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$
- Ισχύουν τα εξής:

1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} f(x_i), x \in \Re$
2. $f(x_1) = F(x_1)$ και $f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$, για $k = 2,3,\ldots$

Πιθανότητα υποσυνόλου A του $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots\}$

- $P(X \in A) = \sum_{i:x_i \in A} f(x_i)$

Παράδειγμα 4ο (1)

- Έστω *Y* η τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό εργατικών ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μία ημέρα στη βιομηχανική ζώνη *A*
- Στον παρακάτω Πίνακα φαίνεται η συνάρτηση πιθανότητας *f* της *Y*

Παράδειγμα 4ο (2)

y	0	1	2	3	4	5
f(y)=P(Y=y)	**0.366**	**0.370**	**0.182**	**0.062**	**0.016**	**0.004**

Η *f* είναι συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ. αφού:

- είναι μη αρνητική
- παίρνει τιμές σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\sum_{i=1}^{6} f(y_i) = 1$

Παράδειγμα 4ο (3)

- Υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες με την *f*:

1. Η πιθανότητα σε μια μέρα να συμβούν το πολύ 3 ατυχήματα
2. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από 2 ατυχήματα
3. Η πιθανότητα σε μια μέρα να συμβεί τουλάχιστον ένα αλλά όχι περισσότερα από 3 ατυχήματα
4. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από 3 ατυχήματα δεδομένου ότι έχει συμβεί τουλάχιστον ένα

Παράδειγμα 4ο (4)

- Τι μορφή έχει η συνάρτηση *F*;

y	0	1	2	3	4	5
f(y)=P(Y=y)	0.366	0.370	0.182	0.062	0.016	0.004
F(y)=P(Y≤y)	0.366	0.736	0.918	0.980	0.996	1.000

Παράδειγμα 4ο (5)

- Υπολογίστε τις παρακάτω πιθανότητες με την *F*:

1. Η πιθανότητα σε μια μέρα να συμβούν το πολύ 3 ατυχήματα
2. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από 2 ατυχήματα
3. Η πιθανότητα σε μια μέρα να συμβεί τουλάχιστον ένα αλλά όχι περισσότερα από 3 ατυχήματα
4. Η πιθανότητα να συμβούν περισσότερα από 3 ατυχήματα δεδομένου ότι έχει συμβεί τουλάχιστον ένα