Στατιστική ΙΙ

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Διάλεξη 8η

- Έλεγχος t για ένα δείγμα
  - Κατανομή δειγματοληψίας του t
  - Έλεγχος t
  - Εκτίμηση του τυπικού σφάλματος
  - Διαστήματα εμπιστοσύνης

13ο κεφάλαιο

Κίνητρο

- Στις περιπτώσεις που η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο z
- Απαιτείται η εκτίμηση της άγνωστης τυπικής απόκλισης και ο έλεγχος t

Παράδειγμα

- Αυστηρές ποινές για τις εκπομπές καυσαερίων
- Οδηγία σχετικά με τα μίλια-ανά-γαλόνι (mpg) ως προς την κατανάλωση καυσίμου
- Κάτω όριο τα 45 mpg
- Πρακτικά αδύνατο να ελεγχθούν όλα τα αυτοκίνητα (συνήθως μετράμε την κατανάλωση σε ένα μικρό δείγμα ανά μοντέλο, έστω 6 αυτοκίνητα)
- Ζητάμε να εξάγουμε συμπέρασμα ώστε να επιβληθεί πρόστιμο ή όχι στην αυτοκινητοβιομηχανία

Παράδειγμα

- Διατύπωση στην μορφή ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0: \mu \geq 45 \text{ και}$$
$$H_1: \mu < 45$$

- Πιθανά σφάλματα:

Τι ισχύει πραγματικά

Τι εγώ πιστεύω

	Κατάσταση του H0	
Απόφαση	Αληθής H0	Ψευδής H0
Διατήρηση του H0	1) Σωστή απόφαση	3) Σφάλμα τύπου II (αστοχία)
Απόρριψη του H0	2) Σφάλμα τύπου I (εσφαλμένος συναγερμός)	4) Σωστή απόφαση

Μπορώ να το λύσω με έλεγχο z;

Επίπεδο σημαντικότητας 0.01

Κατανομή δειγματοληψίας του t

- Αναπαριστά την κατανομή που θα παίρναμε αν μια τιμή του t υπολογίζονταν για κάθε δειγματικό μέσο για όλα τα πιθανά τυχαία δείγματα (δεδομένου μεγέθους) ενός πλυθισμού
- Η κατανομή αυτή έχει ως παράμετρο έναν θετικό ακέραιο αριθμό που καλείται βαθμός ελευθερίας (df, degree of freedom)
- Η διαισθητική ερμηνεία του df είναι ότι αναπαριστά των αριθμό των πραγματικά ελευθέρων μεταβλητών του προβλήματος
- Στην εκτίμηση της άγνωστης μεταβλητότητας του πληθυσμού, κάνουμε χρήση της τετραγωνικής απόκλισης από τον δειγματικό μέσο οπότε «χάνεται» ένας df
- Οπότε για δείγμα μεγέθους n, df=n-1

Παράδειγμα df=n-1

4 μετρήσεις είναι ικανές να δώσουν και την 5η

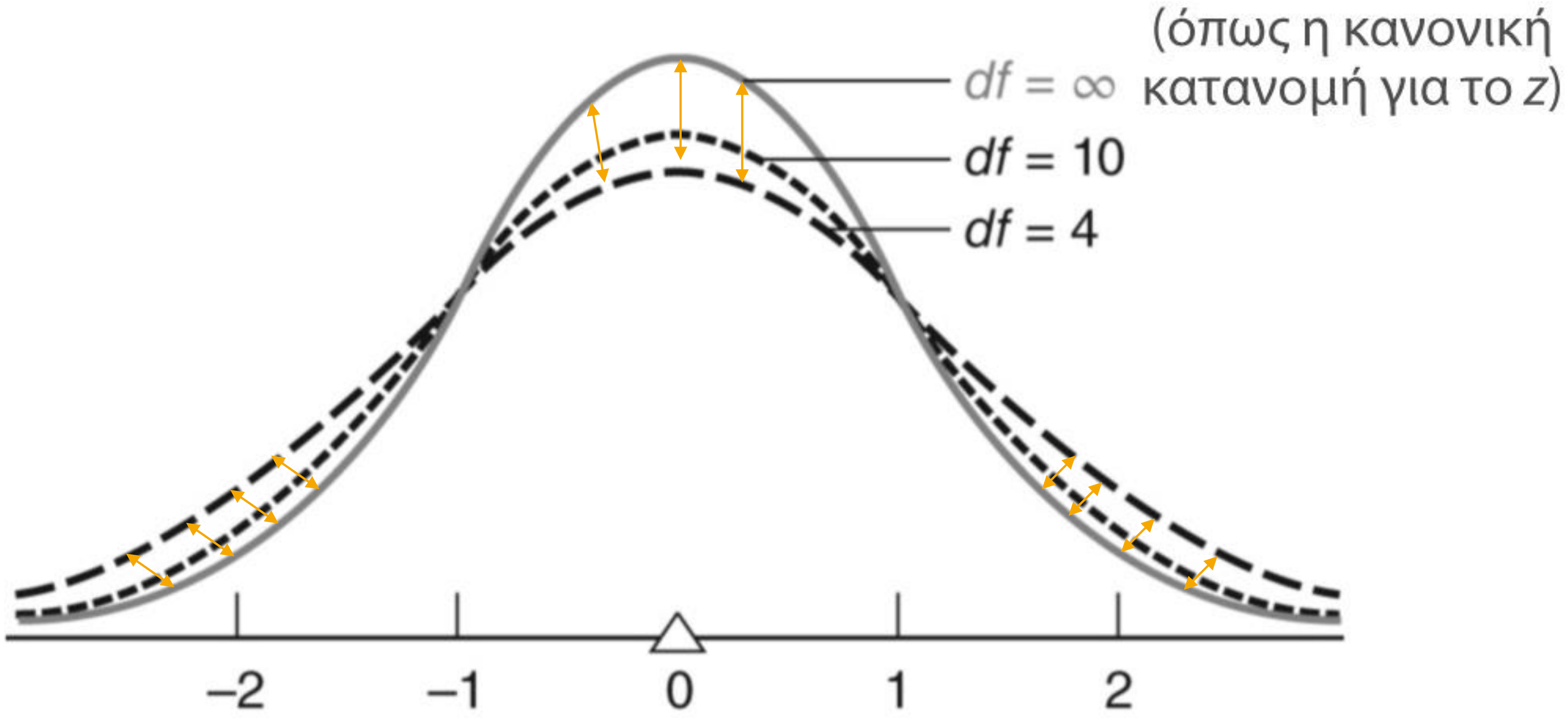
Λόγω της σχέσης

WHEN μ IS UNKNOWN ($\bar{X} = 3$)			WHEN μ IS KNOWN ($\mu = 2$)		
X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	X	$X - \mu$	$(X - \mu)^2$
7	$7 - 3 = 4$	16	7	$7 - 2 = 5$	25
3	$3 - 3 = 0$	0	3	$3 - 2 = 1$	1
1	$1 - 3 = -2$	4	1	$1 - 2 = -1$	1
0	$0 - 3 = -3$	9	0	$0 - 2 = -2$	4
4	$4 - 3 = 1$	1	4	$4 - 2 = 2$	4
	$\Sigma(X - \bar{X}) = 0$	$\Sigma(X - \bar{X})^2 = 30$		$\Sigma(X - \mu) = 5$	$\Sigma(X - \mu)^2 = 35$
	$df = n - 1 = 5 - 1 = 4$			$df = n = 5$	

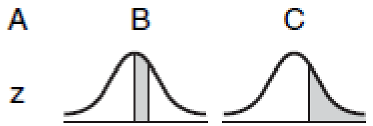
$$s^2(df = n-1) = \frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{n-1} = \frac{30}{4} = 7.50$$

$$s^2(df = n) = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{n} = \frac{35}{5} = 7.00$$

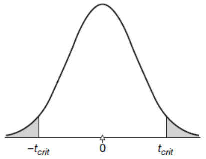
Σύγκριση με την τυποποιημένη κανονική κατανομή



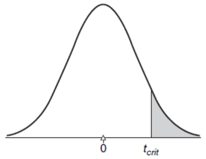
Σύγκριση με την τυποποιημένη κανονική κατανομή



A	B	C
1.62	.4474	.0526
1.63	.4484	.0516
1.64	.4495	.0505
1.65	.4505	.0495
1.66	.4515	.0485
1.67	.4525	.0475



	$p > .05$	$p < .05$	$p < .01$	$p < .001$
df		.05*	.01**	.001
1		12.706	63.657	636.62
2		4.303	9.925	31.598
3		3.182	5.841	12.924
4		2.776	4.604	8.610
5		2.571	4.032	6.869



	$p > .05$	$p < .05$	$p < .01$	$p < .001$
df		.05	.01	.001
1		6.314	31.821	318.31
2		2.920	6.965	22.326
3		2.353	4.541	10.213
4		2.132	3.747	7.173
5		2.015	3.365	5.893

Διαφορετικές τιμές
για βαθμούς ελευθερίας

Αν δεν μπορούμε να βρούμε στους πίνακες
το df που μας ενδιαφέρει, τότε χρησιμοποιούμε
τον αμέσως μικρότερο αριθμό του πίνακα.

Παραδείγματα

- Να βρεθούν οι κρίσιμες τιμές βάσει της κατανομής t, για τους στατιστικούς ελέγχους αποφάσεων:

(α) αμφίπλευρος, α=0.05, df=12

(β) μονόπλευρος αριστερής πλευράς, α=0.01, df=19

(γ) μονόπλευρος δεξιάς πλευράς, α=0.05, df=38

(δ) αμφίπλευρος, α=0.01, df=48

Παραδείγματα

(α) αμφίπλευρος, α=0.05, df=12

±2.179

(β) μονόπλευρος αριστερής πλευράς, α=0.01, df=19

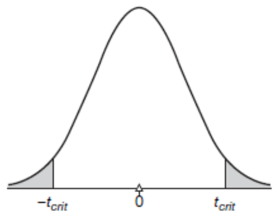
−2.539

(γ) μονόπλευρος δεξιάς πλευράς, α=0.05, df=38

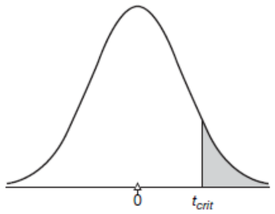
1.697

(δ) αμφίπλευρος, α=0.01, df=48

±2.704



	p > .05	p < .05	p < .01	p < .001
df		.05*	.01**	.001
1		12.706	63.657	636.62
2		4.303	9.925	31.598
3		3.182	5.841	12.924
4		2.776	4.604	8.610
5		2.571	4.032	6.869
6		2.447	3.707	5.959
7		2.365	3.499	5.408
8		2.306	3.355	5.041
9		2.262	3.250	4.781
10		2.228	3.169	4.587
11		2.201	3.106	4.437
12		2.179	3.055	4.318
13		2.160	3.012	4.221
14		2.145	2.977	4.140
15		2.131	2.947	4.073
16		2.120	2.921	4.015
17		2.110	2.898	3.965
18		2.101	2.878	3.922
19		2.093	2.861	3.883
20		2.086	2.845	3.850
21		2.080	2.831	3.819
22		2.074	2.819	3.792
23		2.069	2.807	3.767
24		2.064	2.797	3.745
25		2.060	2.787	3.725
26		2.056	2.779	3.707
27		2.052	2.771	3.690
28		2.048	2.763	3.674
29		2.045	2.756	3.659
30		2.042	2.750	3.646
40		2.021	2.704	3.551
60		2.000	2.660	3.460
120		1.980	2.617	3.373
∞		1.960	2.576	3.291



	p > .05	p < .05	p < .01	p < .001
df		.05	.01	.001
1		6.314	31.821	318.31
2		2.920	6.965	22.326
3		2.353	4.541	10.213
4		2.132	3.747	7.173
5		2.015	3.365	5.893
6		1.943	3.143	5.208
7		1.895	2.998	4.785
8		1.860	2.896	4.501
9		1.833	2.821	4.297
10		1.812	2.764	4.144
11		1.796	2.718	4.025
12		1.782	2.681	3.930
13		1.771	2.650	3.852
14		1.761	2.624	3.787
15		1.753	2.602	3.733
16		1.746	2.583	3.686
17		1.740	2.567	3.646
18		1.734	2.552	3.610
19		1.729	2.539	3.579
20		1.725	2.528	3.552
21		1.721	2.518	3.527
22		1.717	2.508	3.505
23		1.714	2.500	3.485
24		1.711	2.492	3.467
25		1.708	2.485	3.450
26		1.706	2.479	3.435
27		1.703	2.473	3.421
28		1.701	2.467	3.408
29		1.699	2.462	3.396
30		1.697	2.457	3.385
40		1.684	2.423	3.307
60		1.671	2.390	3.232
120		1.658	2.358	3.160
∞		1.645	2.326	3.090

Έλεγχος t

- Όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, άρα και το τυπικό σφάλμα, τότε καταφεύγουμε στην εκτίμησή του $\sigma_{\bar{\mathrm{X}}}$
- Παρόμοια με τον έλεγχο z

$$\mathrm{t} = \frac{\text{δειγματικός μέσος } - \text{υποθετικός μέσος πληθυσμού}}{\text{εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα}}$$

$$\mathrm{t} = \frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu_{\upsilon\pi o\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}}}{s_{\bar{\mathrm{X}}}}$$

Έλεγχος t

- Παρατηρούμε πως σε σχέση με τον έλεγχο z, η συνάρτηση κατανομής του t είναι περισσότερο διογκωμένη στις «ουρές» της
- Αυτό σημαίνει πως οι αντίστοιχες κρίσιμες τιμές απέχουν μεγαλύτερη απόσταση από την μέση τιμή
- Πχ για $\alpha=0.01$ ο μονόπλευρος αριστερός έλεγχος για το έλεγχο t έχει κρίσιμη τιμή -3.365 ενώ για τον έλεγχο z τιμή -2.33

Κοινό μοτίβο

- Γενικά στους ελέγχους υποθέσεων ακολουθούμε παρόμοιο τρόπο εργασίας:

Αν κάποιο παρατηρούμενο στατιστικό στοιχείο, πχ μέσος ενός τυχαίου δείγματος, θεωρείται σπάνιο με βάση την μηδενική υπόθεση, τότε απορρίπτουμε την H_0

Εκτίμηση του τυπικού σφάλματος

- Αν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, την εκτιμούμε βάσει του δείγματος
- Η αλλαγή αυτή σε σχέση με τον έλεγχο z, επιφέρει μεγάλες αλλαγές στον έλεγχο υποθέσεων
- Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}}$$

$$df = n - 1$$

Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου

$$SS = \Sigma\left(X - \bar{X}\right)^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}$$

Παράδειγμα

- Ελέγχουμε 10 συσκευασίες ως προς το βάρος τους σε ουγγίες
- Για το τυχαίο δείγμα λαμβάνουμε τις μετρήσεις:
  16, 15, 14, 15, 14, 15, 16, 14, 14, 14
- Υπολογίσετε

  (α) τον μέσο

  (β) το εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου

Παράδειγμα

(α) $\bar{X} = \dfrac{147}{10} = 14.7$

$$s_{\bar{X}} = \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}} \qquad \boxed{df = n - 1}$$

(β) Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα του μέσου

$$SS = \Sigma(X - \bar{X})^2 = \boxed{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\boxed{2167 - \frac{21609}{10}}}{\boxed{10 - 1}}} = \sqrt{\frac{6.10}{9}} = \sqrt{.68} = .82$$

$$s_{\bar{X}} = \boxed{\frac{.82}{\sqrt{10}}} = \frac{.82}{3.16} = .26$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αυστηρές ποινές για τις εκπομπές καυσαερίων
- Οδηγία σχετικά με τα μίλια-ανά-γαλόνι (mpg) ως προς την κατανάλωση καυσίμου
- Κάτω όριο τα 45 mpg
- Πρακτικά αδύνατο να ελεγχθούν όλα τα αυτοκίνητα (συνήθως μετράμε την κατανάλωση σε ένα μικρό δείγμα ανά μοντέλο, έστω 6 αυτοκίνητα)
- Ζητάμε να εξάγουμε συμπέρασμα ώστε να επιβληθεί πρόστιμο ή όχι στην αυτοκινητοβιομηχανία

Παράδειγμα

- Διατύπωση στην μορφή ελέγχου υποθέσεων:

$$H_0: \mu \geq 45 \text{ και}$$
$$H_1: \mu < 45$$

- Επίπεδο σημαντικότητας 0.01

Παράδειγμα

- **Βήμα 1ο**
  - Εκχώρηση τιμής στο n (1)
  - Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
  - Εύρεση του μέσου (3)
  - Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
  - Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
  - Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος s (7)

Παράδειγμα

- **Βήμα 1ο**
  - Εκχώρηση τιμής στο n (1)
  - Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
  - Εύρεση του μέσου (3)
  - Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
  - Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
  - Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος s (7)

Δεδομένα του προβλήματος

X	4 X^2
40	1600
44	1936
46	2116
41	1681
43	1849
44	1936

1 $n = 6$ 2 $\Sigma X = 258$ 5 $\Sigma X^2 = 11118$

3 $$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$$

6 $$SS = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 11118 - \frac{(258)^2}{6} = 11118 - \frac{66564}{6} = 11118 - 11094 = 24$$

7 $$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{24}{6-1}} = \sqrt{4.8} = 2.19$$

Παράδειγμα

Βήμα 2ο

- Υπολογισμός του εκτιμώμενου τυπικού σφάλματος του μέσου (8)

$$8 \quad s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.19}{\sqrt{6}} = \frac{2.19}{2.45} = 0.89$$

Παράδειγμα

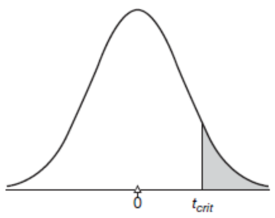
Βήμα 3ο

- Εκχώρηση τιμής του υποθετικού μέσου του πληθυσμού (9)
- Υπολογισμός του t (10)

9 $\mu_{hyp} = 45$

10 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_{hyp}}{s_{\overline{X}}} = \dfrac{43 - 45}{0.89} = \dfrac{-2}{0.89} = -2.25$

Παράδειγμα



$$t = \frac{\overline{X} - \mu_{hyp}}{s_{\overline{X}}} = \frac{43 - 45}{0.89} = \frac{-2}{0.89} = -2.25$$

df=5, a=0.01

Μονόπλευρος αριστερής πλευράς:
κρίσιμη τιμή -3.365

Δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0

$p > .05$ $p < .05$ $p < .01$ $p < .001$

df	.05	.01	.001
1	6.314	31.821	318.31
2	2.920	6.965	22.326
3	2.353	4.541	10.213
4	2.132	3.747	7.173
5	2.015	3.365	5.893
6	1.943	3.143	5.208
7	1.895	2.998	4.785
8	1.860	2.896	4.501
9	1.833	2.821	4.297
10	1.812	2.764	4.144
11	1.796	2.718	4.025
12	1.782	2.681	3.930
13	1.771	2.650	3.852
14	1.761	2.624	3.787
15	1.753	2.602	3.733
16	1.746	2.583	3.686
17	1.740	2.567	3.646
18	1.734	2.552	3.610
19	1.729	2.539	3.579
20	1.725	2.528	3.552
21	1.721	2.518	3.527
22	1.717	2.508	3.505
23	1.714	2.500	3.485
24	1.711	2.492	3.467
25	1.708	2.485	3.450
26	1.706	2.479	3.435
27	1.703	2.473	3.421
28	1.701	2.467	3.408
29	1.699	2.462	3.396
30	1.697	2.457	3.385
40	1.684	2.423	3.307
60	1.671	2.390	3.232
120	1.658	2.358	3.160
∞	1.645	2.326	3.090

Διαστήματα εμπιστοσύνης

- Ο ισχυρισμός α% βεβαιότητας (πχ α=95) σημαίνει μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι ένα παρατηρούμενο ΔΕ περιλαμβάνει τον πραγματικό μέσο όταν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δεν είναι γνωστή (αλλά κάνουμε χρήση του εκτιμώμενου τυπικού σφάλματος του μέσου)

$$\overline{X} \pm (t_{conf})(s_{\overline{X}})$$

Δειγματικός μέσος

Τιμή από την κατανομή t
στους καταλλήλους βαθμούς
ελευθερίας και επίπεδο εμπιστοσύνης

Εκτιμώμενο τυπικό
σφάλμα του μέσου

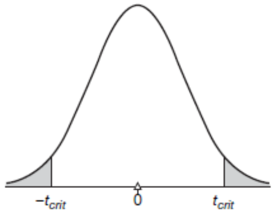
Παράδειγμα

- Να υπολογισθεί το ΔΕ του μέσου για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%

$$\bar{X} \pm (t_{conf})(s_{\bar{X}})$$

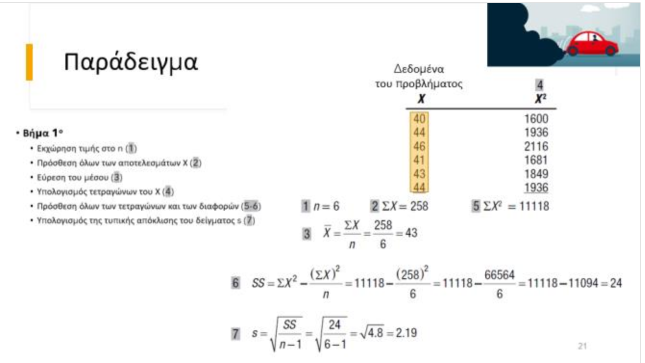
$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.19}{\sqrt{6}} = \frac{2.19}{2.45} = 0.89$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$$



	$p > .05$	$p < .05$	$p < .01$	$p < .001$
df	.05*	.01**	.001	
1	12.706	63.657	636.62	
2	4.303	9.925	31.598	
3	3.182	5.841	12.924	
4	2.776	4.604	8.610	
5	2.571	4.032	6.869	

$$43 \pm (2.571)(0.89) = 43 \pm 2.29 = \begin{cases} 45.29 \\ 40.71 \end{cases}$$



Παράδειγμα

- Βήμα 1°
  - Εκχώρηση τιμής στο n (1)
  - Πρόσθεση όλων των αποτελεσμάτων X (2)
  - Εύρεση του μέσου (3)
  - Υπολογισμός τετραγώνων του X (4)
  - Πρόσθεση όλων των τετραγώνων και των διαφορών (5-6)
  - Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης του δείγματος s (7)

Δεδομένα του προβλήματος

X	4 X^2
40	1600
44	1936
46	2116
41	1681
43	1849
44	1936

1 $n = 6$ 2 $\Sigma X = 258$ 5 $\Sigma X^2 = 11118$

3 $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{258}{6} = 43$

6 $SS = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = 11118 - \frac{(258)^2}{6} = 11118 - \frac{66564}{6} = 11118 - 11094 = 24$

7 $s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{24}{6-1}} = \sqrt{4.8} = 2.19$

21

Παράδειγμα

- Μακροπρόθεσμα, το 95% όλων των διαστημάτων όπως το υπολογισθέν, θα περιλαμβάνει τον άγνωστο μέσο του πληθυσμού
- Ο ισχυρισμός 95% βεβαιότητας σημαίνει πως μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι το παρατηρούμενο ΔΕ [40.71-45.29] περιλαμβάνει τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού των αυτοκινήτων του συγκεκριμένου μοντέλου

Υποθέσεις/σχόλια σχετικά με το t

- Η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πληθυσμός κατανέμεται κανονικά
  - Και όταν ακόμη δεν ικανοποιείται η συνθήκη το t διατηρεί την ακρίβεια του όταν το δείγμα δεν είναι υπερβολικά μικρό
  - Για μικρά μεγέθη δείγματος (πχ <10) εφόσον γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός είναι μη-κανονικός, προτείνεται η αύξηση του μεγέθους του δείγματος πριν υπολογίσουμε και χρησιμοποιήσουμε το t

Σύνδεσμοι σε online συγγράμματα

- https://www.stat.cmu.edu/~hseltman/309/Book/chapter6.pdf

Chapter 6

The t-test and Basic Inference Principles

The t-test is used as an example of the basic principles of statistical inference.

Σύνδεσμοι σε online video

- https://www.youtube.com/watch?v=pTmLQvMM-1M

R code

- t.test(data)