

Στατιστική II

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 7η

- Εκτίμηση και διαστήματα εμπιστοσύνης
- Διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου
- Επίπεδο εμπιστοσύνης
- Ερμηνεία
- Ο ρόλος του μεγέθους
- Στατιστικοί έλεγχοι ή διαστήματα εμπιστοσύνης
- Η σχέση με τα ποσοστά
- Πρακτικά θέματα με την R

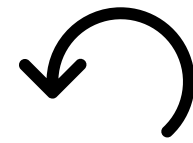


12^ο κεφάλαιο

Βασική Ιδέα

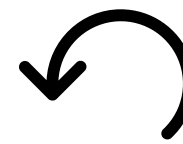
- Μια προσέγγιση με ελέγχους υποθέσεων εξετάζει και μελετά αν υπάρχει κάποια επίδραση
- Το διάστημα εμπιστοσύνης (ΔE) προσθέτει στην κατανόησή μας το εύρος της πιθανής επίδρασης για ένα γνωστό επίπεδο εμπιστοσύνης

Παράδειγμα



- Έστω ότι οι φοιτητές που λαμβάνουν μέρος στις εθνικές εξετάσεις έχουν μέσο 500 και τυπική απόκλιση 110 σε εθνικό επίπεδο.
- Σε τυχαίο δείγμα (τ.δ.) 100 τοπικών φοιτητών έχουν μέσο 533.
- Υπάρχει/συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο στον τοπικό πληθυσμό σε σχέση με τον εθνικό;

Παράδειγμα

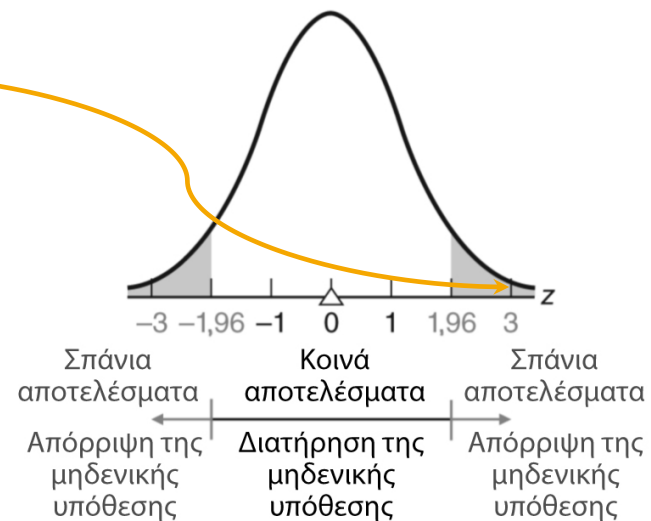


- Από το έλεγχο υπόθεσης z

$$\cancel{H_0: \mu = 500} \text{ και } H_1: \mu \neq 500$$



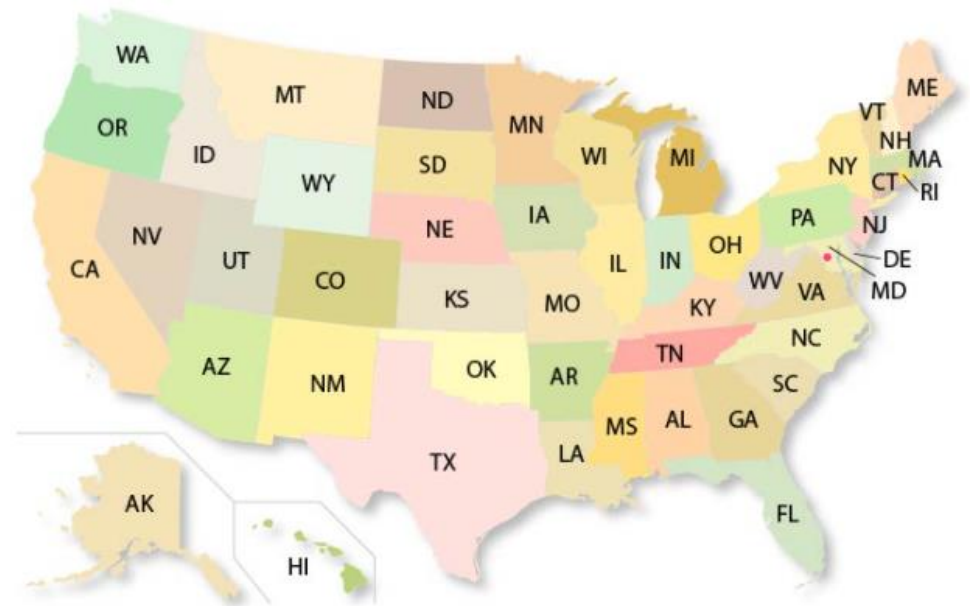
$$z = \frac{533 - 500}{11} = \frac{33}{11} = 3$$



Παράδειγμα



- Τι μπορούμε να πούμε να πούμε αν:
 - Δεν γνωρίζαμε τι συμβαίνει σε εθνικό επίπεδο;
 - Αν δεν μας ενδιαφέρει μια σύγκριση;



Εκτίμηση σημείου για τον μέσο

- Κάνουμε χρήση μίας μόνο τιμής για να αναπαραστήσουμε τον άγνωστο μέσο του πληθυσμού
- Άμεσος τύπος εκτίμησης από το δείγμα
- Πχ αθροίζουμε τους βαθμούς του δείγματος 100 ντόπιων φοιτητών και διαιρούμε με το 100
- Το υπολογισμένο 533 αποτελεί την καλύτερη επιλογή σημειακής εκτίμησης του μέσου με βάση το δείγμα

Εκτίμηση σημείου για τον μέσο

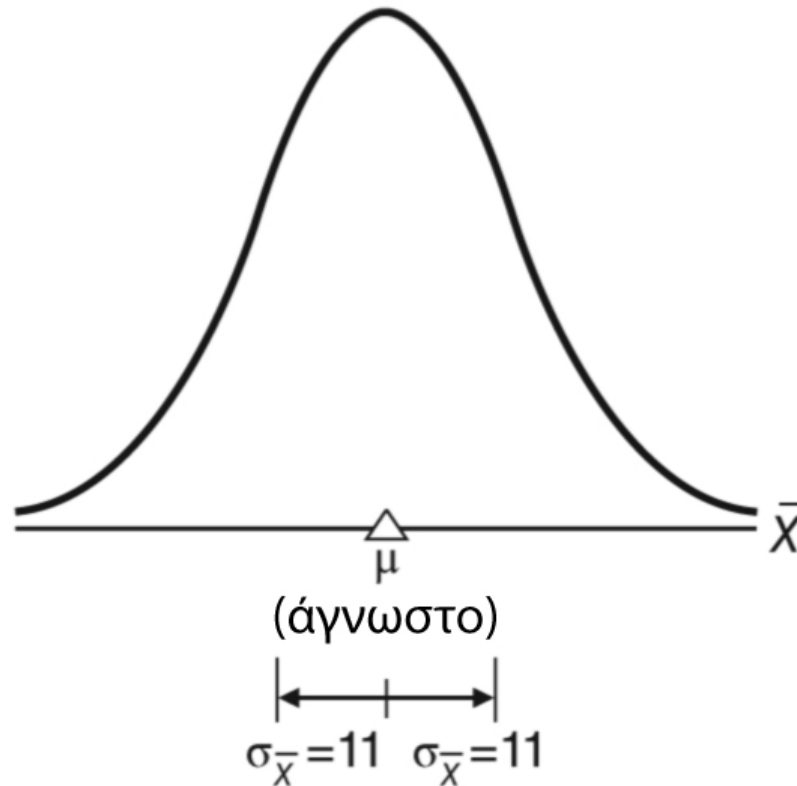
- Συνήθως είναι ανακριβής εκτίμηση του μέσου
- Λόγω της μεταβλητότητας του τυχαίου δείγματος
- Είναι απίθανο ένας μόνο δειγματικός μέσος να ισούται με το μέσο του πληθυσμού
- Δεν παρέχουν καμία πληροφορία αναφορικά με τον βαθμό ανακρίβειά τους

Διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο

- Χρησιμοποιεί ένα εύρος τιμών, τα οποία σε ένα γνωστό βαθμό βεβαιότητας, περιλαμβάνει την τιμή του άγνωστου μέσου του πληθυσμού
- Πχ με 95% βεβαιότητα ο μέσος των ντόπιων φοιτητών είναι μεταξύ 511.44 και 554.56

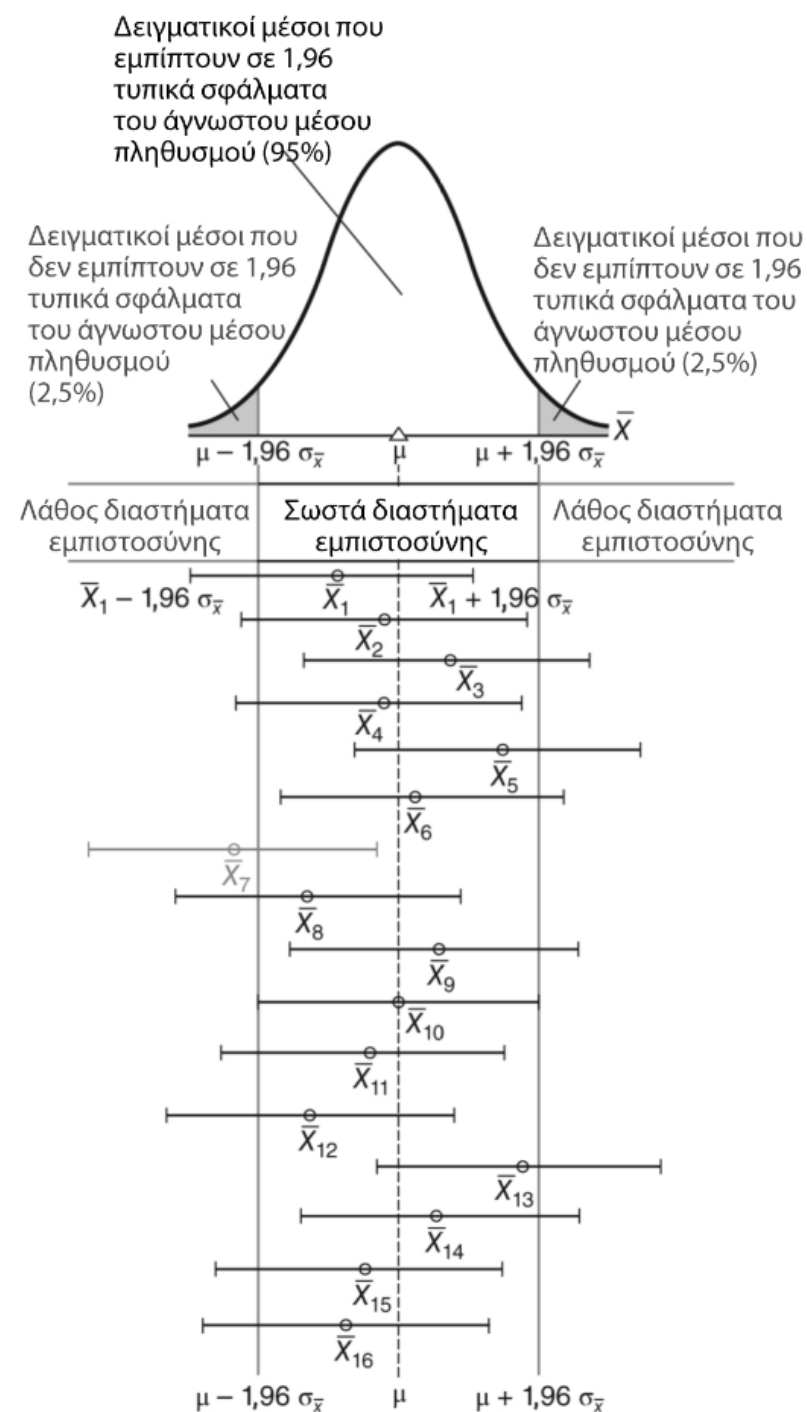
Γιατί λειτουργούν τα διαστήματα εμπιστοσύνης

- Ο μέσος της κατανομής δειγματοληψίας του μέσου, ισούται με τον άγνωστο μέσο του πληθυσμού
- Λαμβάνουμε υπόψη στον υπολογισμό του ΔE το τυπικό σφάλμα της κατανομής δειγματοληψίας
- Υποθέτουμε κανονική κατανομή και υπολογίζουμε βάσει πιθανοτήτων



Υποθετικά πολλά δείγματα και διαστήματα εμπιστοσύνης

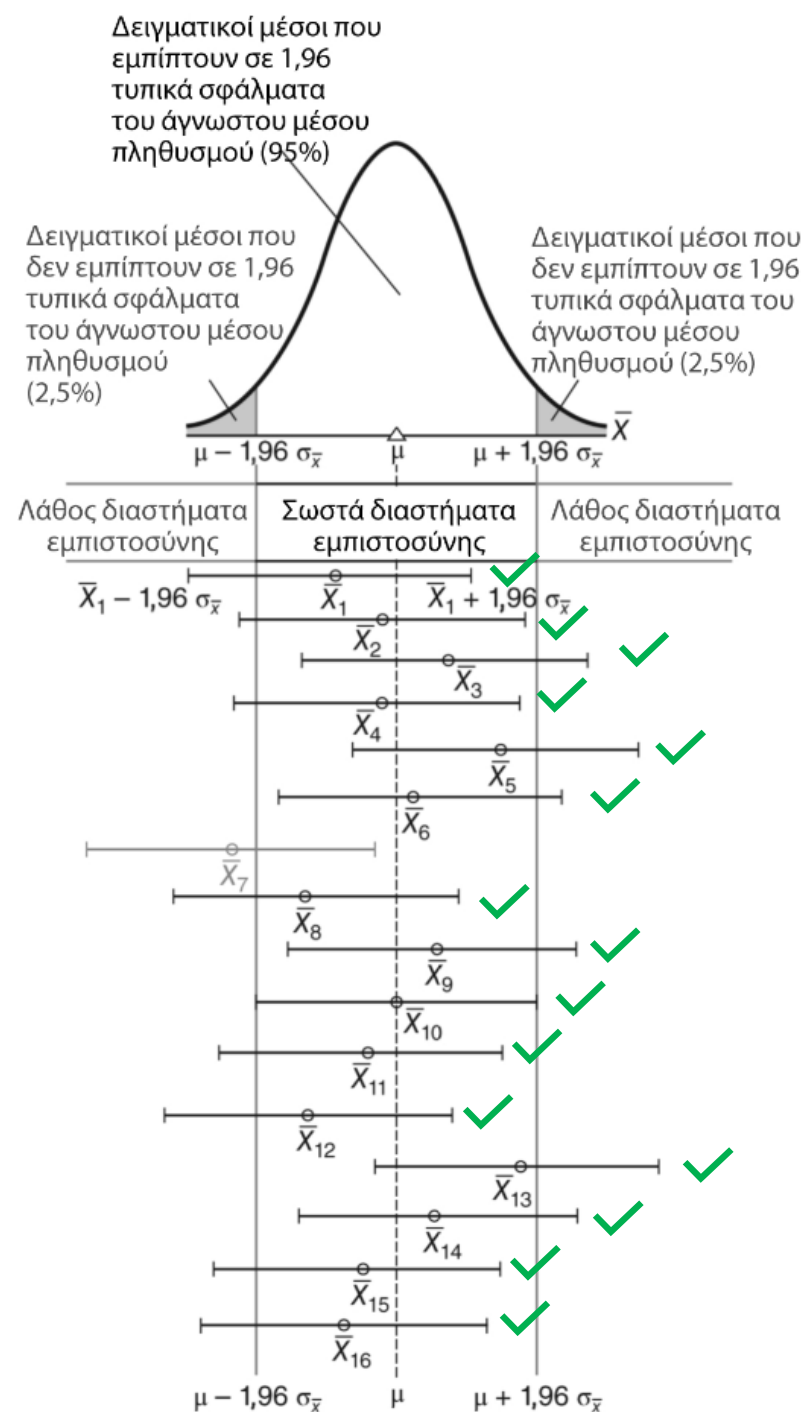
- Στην πραγματικότητα λαμβάνουμε ένα μόνο δείγμα
- Αν λαμβάναμε πολλά δείγματα τότε θα λαμβάναμε μια εικόνα με βάση τον τύπο $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{x}}$



Ορθά διαστήματα εμπιστοσύνης

- Λόγω της κανονικότητας της κατανομής δειγματοληψίας του μέσου το 95% των δειγματικών μέσων θα βρίσκεται εντός 2σ (1.96) απόσταση από τον πραγματικό μέσο
- Οπότε αν επεκτείνουμε το δειγματικό μέσο κατά 1.96 και προς τις δύο κατευθύνσεις, έχουμε πιθανότητα 95% να τον φράξουμε σωστά.

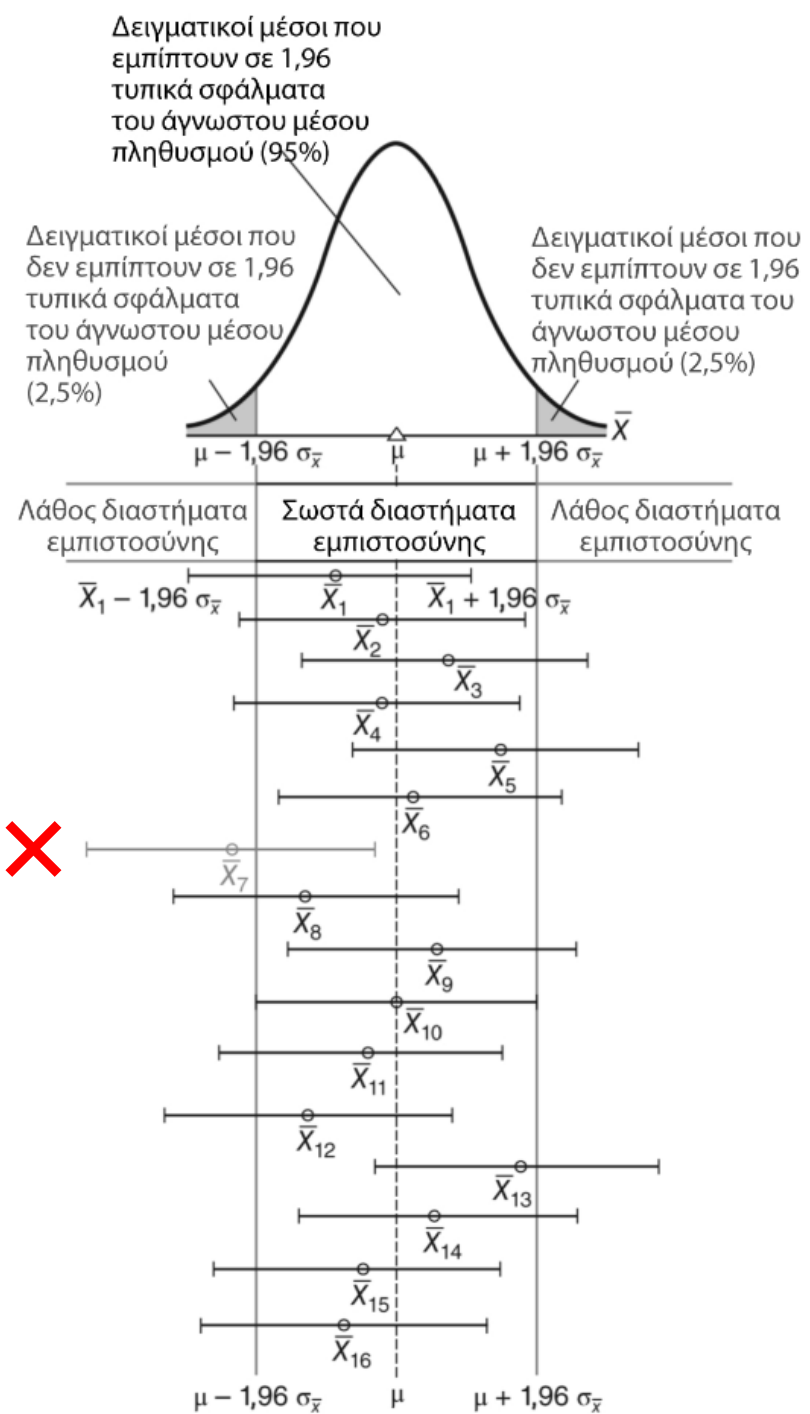
Ορθά διαστήματα εμπιστοσύνης



Λανθασμένα διαστήματα εμπιστοσύνης

- Υπάρχει 5% πιθανότητα, ο δειγματικός μέσος να ανήκει στο σπάνιο τμήμα της υποθετικής συνάρτησης δειγματοληψίας του μέσου
- Οπότε αν επεκτείνουμε το δειγματικό μέσο κατά 1.96 και προς τις δύο κατευθύνσεις, δεν περιλαμβάνουμε τον πραγματικό (άγνωστο) μέσο

Λανθασμένα διαστήματα εμπιστοσύνης



Τρόπος υπολογισμού του ΔΕ

- Τύπος υπολογισμού του διαστήματος εμπιστοσύνης για τον μέσο (βάσει το z):

$$\bar{X} \pm z_{εμπ} \sigma_{\bar{X}}$$

- Υποθέτοντας πως:
- Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού σ είναι γνωστή
- Ο πληθυσμός είναι κανονικός ή ότι το μέγεθος του δείγματος είναι επαρκώς μεγάλος ($n > 25$) ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του κεντρικού οριακού θεωρήματος

Παράδειγμα



- Μαθητές 4^{ης} δημοτικού αξιολογούνται στην κατανόηση κειμένου
- Βαθμός 4.0 δηλώνει καταλληλότητα για τη τάξη, ενώ μικρότερη τιμή όχι
- Από προηγούμενη μελέτη γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση του πληθυσμού και είναι 0.4
- Σε δείγμα 64 μαθητών 4^{ης} δημοτικού μιας περιφέρειας, βρέθηκε μέσος 3.82
- Να κατασκευαστεί ΔΕ 95% του άγνωστου πληθυσμού της περιφέρειας
- Ερμηνεύστε το ΔΕ

Παράδειγμα



$$\bar{X} \pm z_{\epsilon} \mu \pi \sigma_{\bar{X}}$$

$$3.82 \pm 1.96 \left(\frac{.4}{\sqrt{64}} \right) = \begin{cases} 3.92 \\ 3.72 \end{cases}$$

Table A^a (Continued)
PROPORTIONS (OF AREA) UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE FOR VALUES OF *z*

A	B	C	A	B	C	A	B	C
<i>z</i>			<i>z</i>			<i>z</i>		
1.68	.4535	.0465	2.24	.4875	.0125	2.80	.4974	.0026
1.69	.4545	.0455	2.25	.4878	.0122	2.81	.4975	.0025
1.70	.4554	.0446	2.26	.4881	.0119	2.82	.4976	.0024
1.71	.4564	.0436	2.27	.4884	.0116	2.83	.4977	.0023
1.72	.4573	.0427	2.28	.4887	.0113	2.84	.4977	.0023
1.73	.4582	.0418	2.29	.4890	.0110	2.85	.4978	.0022
1.74	.4591	.0409	2.30	.4893	.0107	2.86	.4979	.0021
1.75	.4599	.0401	2.31	.4896	.0104	2.87	.4979	.0021
1.76	.4608	.0392	2.32	.4898	.0102	2.88	.4980	.0020
1.77	.4616	.0384	2.33	.4901	.0099	2.89	.4981	.0019
1.78	.4625	.0375	2.34	.4904	.0096	2.90	.4981	.0019
1.79	.4633	.0367	2.35	.4906	.0094	2.91	.4982	.0018
1.80	.4641	.0359	2.36	.4909	.0091	2.92	.4982	.0018
1.81	.4649	.0351	2.37	.4911	.0089	2.93	.4983	.0017
1.82	.4656	.0344	2.38	.4913	.0087	2.94	.4984	.0016
1.83	.4664	.0336	2.39	.4916	.0084	2.95	.4984	.0016
1.84	.4671	.0329	2.40	.4918	.0082	2.96	.4985	.0015
1.85	.4678	.0322	2.41	.4920	.0080	2.97	.4985	.0015
1.86	.4686	.0314	2.42	.4922	.0078	2.98	.4986	.0014
1.87	.4693	.0307	2.43	.4925	.0075	2.99	.4986	.0014
1.88	.4699	.0301	2.44	.4927	.0073	3.00	.4987	.0013
1.89	.4706	.0294	2.45	.4929	.0071	3.01	.4987	.0013
1.90	.4713	.0287	2.46	.4931	.0069	3.02	.4987	.0013
1.91	.4719	.0281	2.47	.4932	.0068	3.03	.4988	.0012
1.92	.4726	.0274	2.48	.4934	.0066	3.04	.4988	.0012
1.93	.4732	.0268	2.49	.4936	.0064	3.05	.4989	.0011
1.94	.4738	.0262	2.50	.4938	.0062	3.06	.4989	.0011
1.95	.4744	.0256	2.51	.4940	.0060	3.07	.4989	.0011
1.96	.4750	.0250	2.52	.4941	.0059	3.08	.4990	.0010
1.97	.4756	.0244	2.53	.4943	.0057	3.09	.4990	.0010

Παράδειγμα



- Με βεβαιότητα 95%, ο μέσος της βαθμολογίας των μαθητών της περιφέρειας είναι μεταξύ 3.72 και 3.92.
- Συμπεραίνουμε με υψηλή βεβαιότητα πως η μέση επίδοση των μαθητών της συγκεκριμένης περιφέρειας υστερούν του εθνικού μέσου

Ερμηνεία του ΔΕ

- Ο ισχυρισμός $\alpha\%$ βεβαιότητας (πχ $\alpha=95$) σημαίνει μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι ένα παρατηρούμενο ΔΕ περιλαμβάνει τον πραγματικό μέσο
- Στην πράξη κατασκευάζουμε μόνο ένα διάστημα εμπιστοσύνης και ερμηνεύουμε το διάστημα αυτό με την παραπάνω βεβαιότητα

Παράδειγμα

- Ομάδα υποψηφίων για θέσεις πανεπιστημίων λαμβάνουν ένα ειδικό μάθημα προετοιμασίας 5 εβδομάδων
- Ο εθνικός μέσος είναι 500
- Στην ομάδα με το ειδικό μάθημα προετοιμασίας το ΔΕ για τον μέσο είναι 507-527
- Επιλέξτε σωστό ή λάθος για τα παρακάτω

(α) Περίπου το 95% των μαθητών που πήραν το ειδικό μάθημα βαθμολογήθηκε μεταξύ 507 και 527 ✗

(β) Το διάστημα 507 - 527 αναφέρεται σε πιθανές τιμές του μέσου πληθυσμού όλων των φοιτητών που πήραν το ειδικό μάθημα ✓

(γ) Ο πραγματικός μέσος είναι αναμφίβολα στο διάστημα 507 - 527 ✗

(δ) Αυτό το διάστημα περιγράφει τον πραγματικό μέσο του πληθυσμού το 95% των φορών ✗

(ε) Στην πράξη δεν γνωρίζουμε ποτέ πραγματικά αν το διάστημα 507 - 527 περιέχει τον μέσο του πληθυσμού των μαθητών του ειδικού μαθήματος ✓

(στ) Μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι ο μέσος του πληθυσμού των μαθητών του ειδικού μαθήματος είναι μεταξύ 507 - 527 ✓

Επίπεδο εμπιστοσύνης

- Υποδεικνύει το ποσοστό των περιπτώσεων στις οποίες μια σειρά διαστημάτων εμπιστοσύνης περιλαμβάνει το άγνωστο χαρακτηριστικό (πχ μέσο)
- Ρυθμίζει το εύρος του ΔE μέσω της επιλογής του $z_{εμπ}$ στον τύπο

$$\bar{X} \pm z_{εμπ} \sigma_{\bar{X}}$$

Επίδραση στο εύρος

$$\bar{X} \pm z_{\epsilon\mu\pi} \sigma_{\bar{X}}$$



Μεγαλύτερο επίπεδο εμπιστοσύνης




Μεγαλύτερο εύρος



Πολύ κοινές τιμές 95% και 99% (1.96 και 2.58 αντίστοιχα)

Επίδραση του μεγέθους δείγματος

$$\bar{X} \pm z_{\epsilon\mu\pi} \sigma_{\bar{X}}$$


$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Μεγαλύτερος παρονομαστής



Μικρότερο τυπικό σφάλμα



Μικρότερο εύρος

Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων ή διαστήματα εμπιστοσύνης;

- Συνήθως οι στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων (ΣΕΥ) προηγούνται των διαστημάτων εμπιστοσύνης
- Τα ΔΕ τείνουν να δίνουν περισσότερες πληροφορίες
- Ισχύει η γενική αρχή:
«Οι ΣΕΥ απλώς δείχνουν αν υπάρχει επίδραση, ενώ τα ΔΕ μας δείχνουν το πιθανό μέγεθος»

Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων ή διαστήματα εμπιστοσύνης;

- Αν μας ενδιαφέρει η απάντηση στο ερώτημα «υπάρχει επίδραση» ενός νέου «τρόπου» τότε προτιμάμε ΣΕΥ
- Το ΔΕ θα μας βοηθήσει να ποσοτικοποιήσουμε την πιθανή επίδραση του νέου «τρόπου»

ΔΕ για ποσοστά πληθυσμού

- Τι σημαίνει ότι το 64% των ερωτηθέντων είναι θετικοί στην ερώτηση «συμφωνείτε με τις ενέργειες του νέου προέδρου» με περιθώριο σφάλματος $\pm 3\%$
- Εννοεί για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
- Προκύπτει από την έκφραση
(Ποσοστό δείγματος) $\pm 1.96 * (\text{τυπικό σφάλμα ποσοστού})$
- Το ΔΕ για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% είναι 61%-67%

Παράδειγμα

- Σε τυχαίο δείγμα 900 ενηλίκων Αμερικανών, το 70% είναι υπέρ της αυστηροποίησης της οπλοκατοχής με περιθώριο σφάλματος $\pm 4\%$ για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
- Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά/λάθος;
 - (α) Το διάστημα από 66% έως 74% αναφέρεται στις πιθανές τιμές ποσοστού στο δείγμα ✗
 - (β) Το πραγματικό ποσοστό του πληθυσμού είναι από 66% έως 74% ✗
 - (γ) Μακροπρόθεσμα, μια σειρά παρομοίων ΔΕ δεν θα μπορούσε να συμπεριλαμβάνει το πραγματικό ποσοστό του πληθυσμού περίπου το 5% των περιπτώσεων ✓
 - (δ) Μπορούμε να είμαστε εύλογα βέβαιοι ότι το ποσοστό του πληθυσμού είναι μεταξύ 66% και 74% ✓

Online δωρεάν σημειώσεις

- <https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/pglasserman/B6014/ConfidenceIntervals.pdf>



Online video

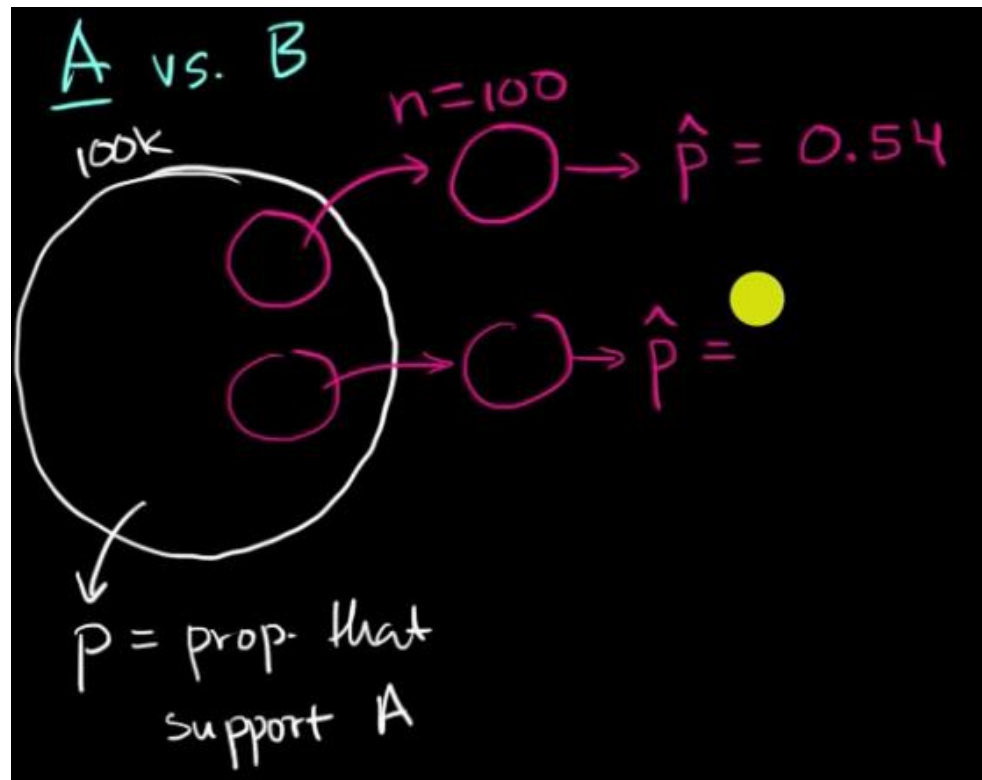
- <https://www.youtube.com/watch?v=TqOeMYtOc1w>

StatQuest

Confidence Intervals!!!

Online video

- <https://www.youtube.com/watch?v=hIM7zdf7zwU>



Εντολές R

```
install.packages("BSDA")
```

```
library("BSDA")
```

```
myx <- round(rnorm(100,500,100),0)
```

```
z.test(myx, y=NULL, mu=500, sigma.x=100)
```