Στατιστική ΙΙ

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Διάλεξη 6η

- Ισχυρές και ασθενείς αποφάσεις
- Μονόπλευροι και αμφίπλευροι έλεγχοι
- Επιλογή επιπέδου σημαντικότητας
- Παραδείγματα

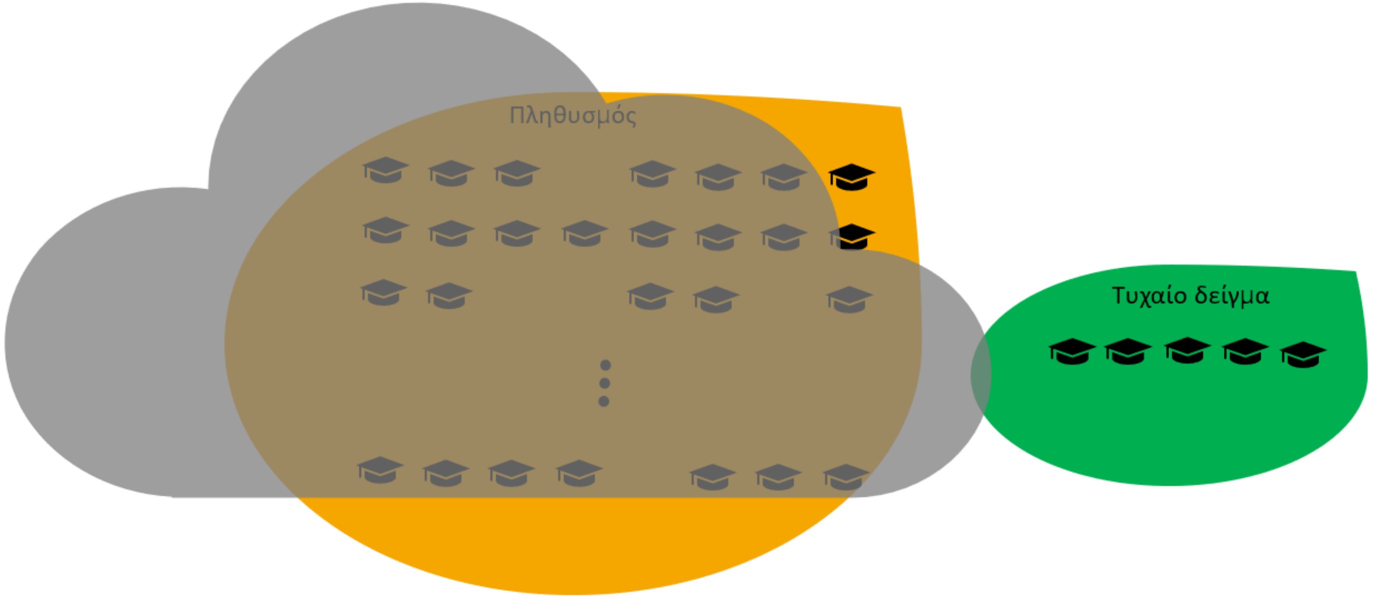
11ο κεφάλαιο

Βασική Ιδέα

- Πάνω στην προσπάθειά μας να μπορέσουμε να πάρουμε απαντήσεις πέρα από τα δείγματα (δηλαδή τους πληθυσμούς) επιδιώκουμε να λάβουμε υπόψη τον ρόλο της τυχαιότητας κατά την δειγματοληψία
- Η τυχαιότητα εξακολουθεί να μπορεί να μας «παραπλανήσει» και την αξιοποιούμε με υπολογισμένο ρίσκο

Γιατί στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

- Το κίνητρο είναι η γενίκευση: Δείγμα → Πληθυσμός



Γιατί στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

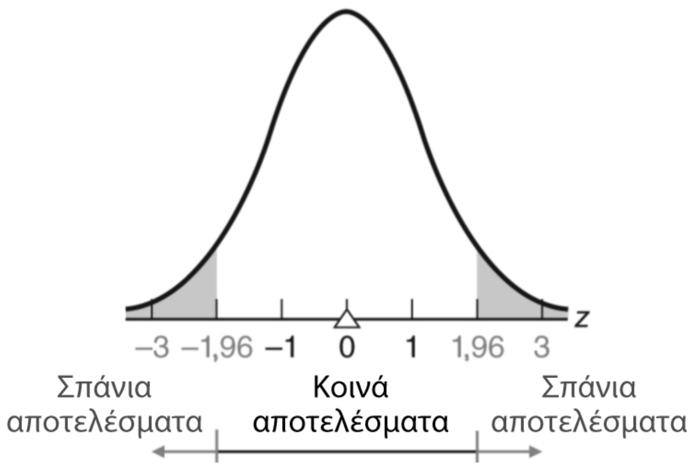
- Αν διαθέτουμε μετρήσεις ολοκλήρων πληθυσμών δεν χρειαζόμαστε καθόλου στατιστική συμπερασματολογία
- Πχ Αν υπολογίσουμε την βαθμολογία όλων των ντόπιων φοιτητών και ο μέσος είναι 502, τότε δεν υπάρχει καμία αμφιβολία πως είναι υψηλότερη από τον εθνικό μέσο (502>500)
- Μικρή διαφορά αλλά υπαρκτή!

Γιατί στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

- Γιατί δεν συγκρίνουμε τον μέσω 100 φοιτητών με τον εθνικό μέσο (δηλ. 500);
- Γιατί μια άλλη επιλογή 100 φοιτητών θα έδινε διαφορετική τιμή
- Έχει δηλαδή μια υποθετική κατανομή βάσει την οποία κάνουμε συγκρίσεις και εξάγουμε αποτελέσματα

Η σημασία του τυπικού σφάλματος

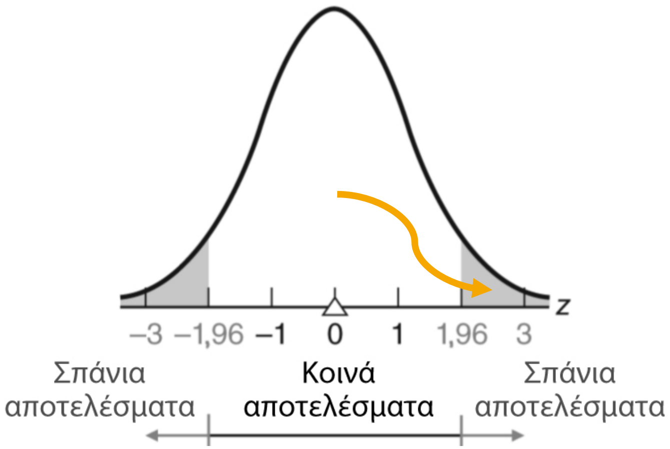
- Ποσοτικοποιεί πόσο μπορεί να διαφέρει ο μέσος ενός δείγματος από εκείνον του πληθυσμού λόγω τύχης



Οριοθετούμε τις περιοχές «ομοιότητας» λόγω τύχης

Πιθανότητα εσφαλμένων αποφάσεων

- Μετά την λήψη απόφασης απόρριψης ή όχι της μηδενικής υπόθεσης, δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα αν ήταν σωστή ή όχι.
    - Σφάλμα τύπου I (ή εσφαλμένος συναγερμός): όταν λόγω τύχης απορρίπτουμε μια αληθή H_0



Πιθανότητα εσφαλμένων αποφάσεων

- Σφάλμα τύπου ΙΙ (ή διατήρηση εσφαλμένου H_0): όταν λόγω τύχης διατηρούμε μια εσφαλμένη H_0
- Σφάλματα είναι αναμενόμενο να συμβούν, αλλά βάσει των καταλλήλων κρίσιμων τιμών μακροπρόθεσμα οι περισσότερες αποφάσεις θα είναι ορθές.

Ασθενείς και ισχυρές αποφάσεις

Ασθενείς αποφάσεις

- Η H_0 διατηρείται όταν το z θεωρείται κοινό
  - Η H_0 θα μπορούσε να είναι αληθής
  - Το ίδιο ισχύει και για πληθώρα άλλων παρομοίων H_0

Ασθενής απόφαση

- Συνήθως συναντάται «ως αποτυχία απόρριψης της H_0»

Ισχυρές αποφάσεις

- Η H_0 απορρίπτεται όταν το z λαμβάνει σπάνιες τιμές στην κατανομή δειγματοληψίας
- Η σπανιότητα μέσω της οποίας γίνεται η απόρριψη μας δίνει μεγαλύτερη σιγουριά και είναι μια ισχυρή απόφαση

Ασθενείς και ισχυρές αποφάσεις

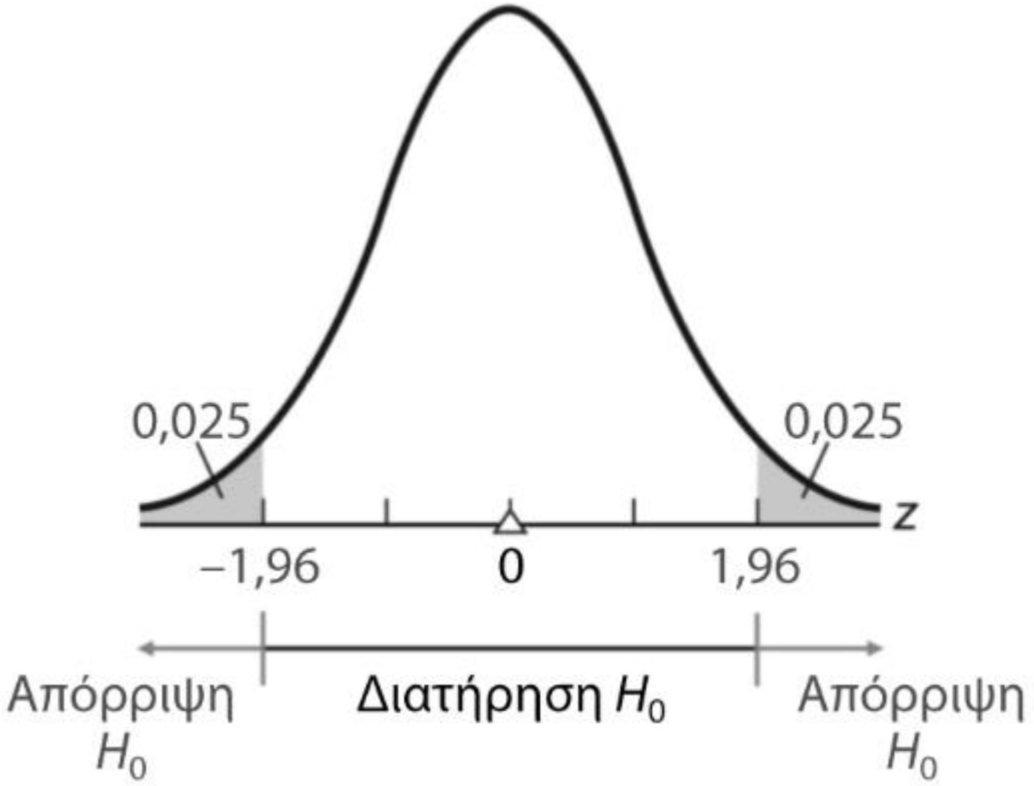
- Η απόφαση μη απόρριψης της H_0 δεν υπονοεί πως η H_0 είναι αληθής
  - Αλλά ότι θα μπορούσε να είναι αληθές (μαζί με πολλές άλλες παρόμοιες)
- Η απόρριψη είναι ισχυρή ένδειξη ότι είναι η H_0 ψευδής
  - Ισχυρή λόγω της σπανιότητας

Μονόπλευροι και αμφίπλευροι έλεγχοι

Αμφίπλευρος έλεγχος

- Μη κατευθυντικός έλεγχος

- Πχ H_0: μ=500 και H_1: μ≠500

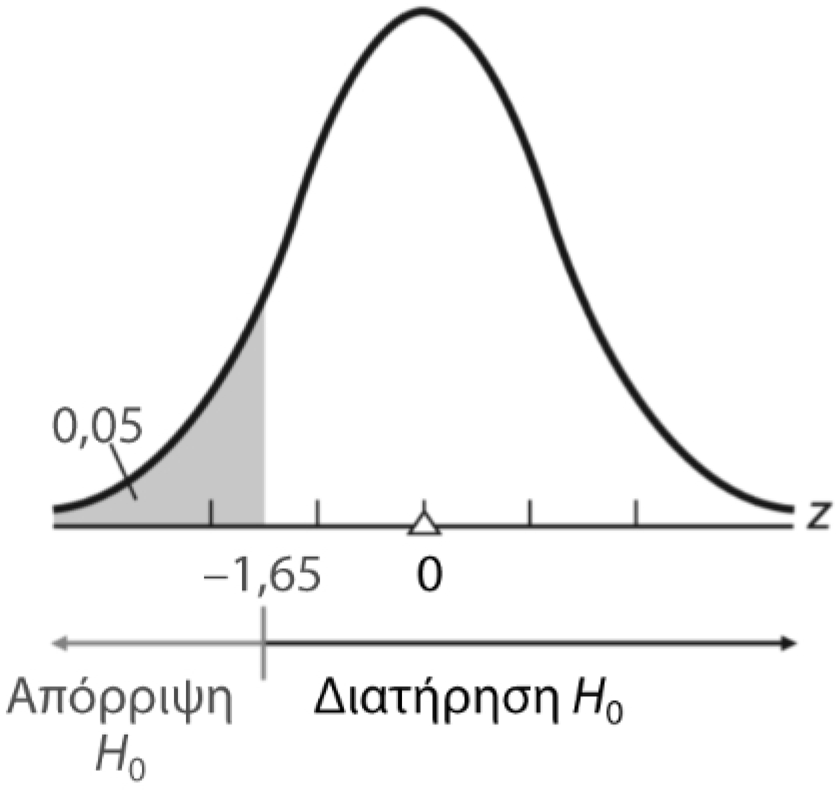


Μονόπλευρος έλεγχος

- Κατευθυντικός έλεγχος

(κρίσιμη τιμή αριστερής πλευράς)

- Πχ H_0: μ≥500 και H_1: μ<500

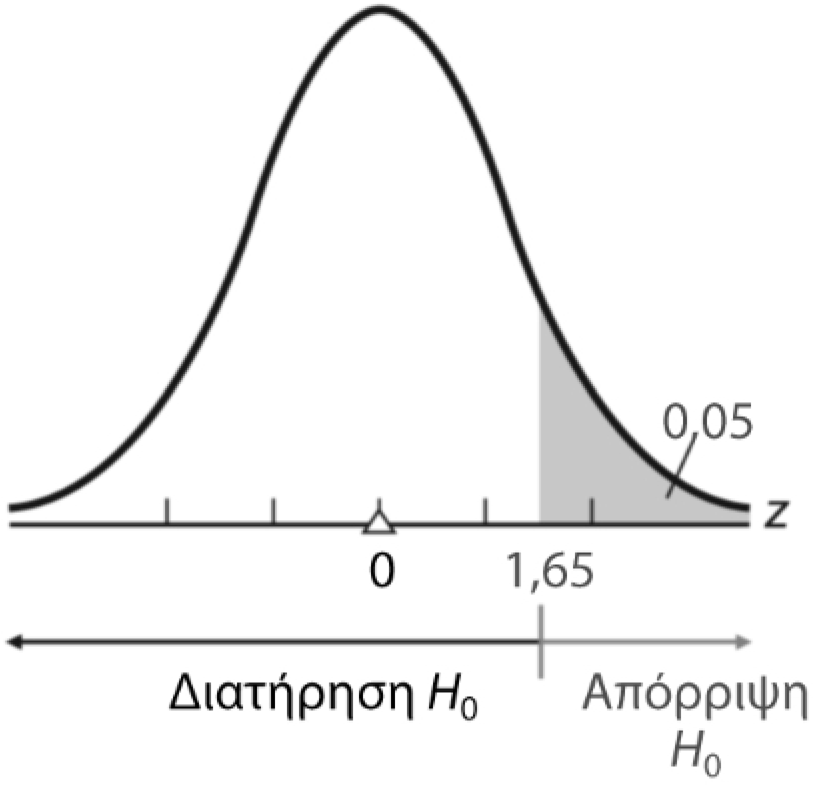


Μονόπλευρος έλεγχος

- Κατευθυντικός έλεγχος

(κρίσιμη τιμή δεξιάς πλευράς)

- Πχ H_0: μ≤500 και H_1: μ>500



Γενικά

- Κάνουμε χρήση μονόπλευρων ελέγχων αν μας ενδιαφέρει η διαφορά από τον μέσο και ταυτόχρονα αν το ξεπερνά ή όχι.
- Το αποφασίζουμε πριν συλλέξουμε τα δεδομένα υπολογίσουμε το z
- Με τους ελέγχους καλύπτουμε όλο το εύρος της περιοχής απόφασης

Επιλογή επιπέδου σημαντικότητας

Επιλογή επιπέδου σημαντικότητας

Επίπεδο σημαντικότητας α

- Καθορίζει τις κρίσιμες τιμές για την απόρριψη ή μη της μηδενικής υπόθεσης

TYPE OF TEST	LEVEL OF SIGNIFICANCE (α) .05	.01
Two-tailed or nondirectional test (H_0: $\mu =$ some number) (H_1: $\mu \neq$ some number)	± 1.96	± 2.58
One-tailed or directional test, lower tail critical (H_0: $\mu \geq$ some number) (H_1: $\mu <$ some number)	-1.65	-2.33
One-tailed or directional test, upper tail critical (H_0: $\mu \leq$ some number) (H_1: $\mu >$ some number)	$+1.65$	$+2.33$

Ερωτήσεις

- Καθορίστε τις κρίσιμες τιμές για

A) Αμφίπλευρος έλεγχος, $\alpha=0.05$

B) Μονόπλευρος έλεγχος δεξιάς πλευράς, $\alpha=0.01$

C) Μονόπλευρος έλεγχος αριστερής πλευράς, $\alpha=0.05$

D) Αμφίπλευρος έλεγχος, $\alpha=0.01$

Απατήσεις (μαζί με αγγλική ορολογία)

- **(a)** Reject *H*0 at the .05 level of significance if *z* equals or is more positive than 1.96 or if *z* equals or is more negative than –1.96.
- **(b)** Reject *H*0 at the .01 level of significance if *z* equals or is more positive than 2.33.
- **(c)** Reject *H*0 at the .05 level of significance if *z* equals or is more negative than –1.65.
- **(d)** Reject *H*0 at the .01 level of significance if *z* equals or is more positive than 2.58 or if *z* equals or is more negative than –2.58.

Παράδειγμα

- Έστω μια μελέτη που επιχειρεί να εξετάσει αν η βιταμίνη C αυξάνει το νοητικό χάρισμα στους μαθητές γυμνασίου
- 36 μαθητές επιλέχθηκαν τυχαία από μια μεγάλη σχολική περιφέρεια και λαμβάνουν δόση 90mg ημερησίως για 2 μήνες
- Κανονικά ο δείκτης IQ σε όλους τους μαθητές ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 100 και τυπική απόκλιση 15
- Μηδενική υπόθεση: οι μαθητές με την βιταμίνη θα έχουν μέσο 100 επίσης
- Επειδή μας ενδιαφέρει η αύξηση καταφεύγουμε σε μονόπλευρο έλεγχο.

Παράδειγμα

- Έλεγχοι υποθέσεων:

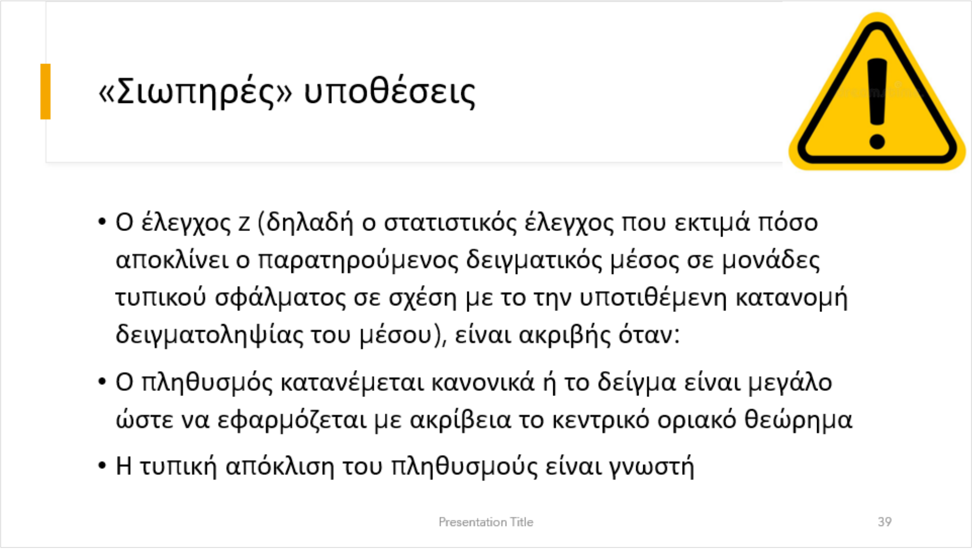
$$H_0: \mu \leq 100 \text{ και}$$

$$H_1: \mu > 100$$

Σχόλιο: εναλλακτικά θα μπορούσαμε να οργανώσουμε το πείραμα με ομάδα ελέγχου

Παράδειγμα

• Ο έλεγχος z είναι κατάλληλος λόγω της κανονικής κατανομής του IQ καθώς και της γνωστής τυπικής απόκλισης



Παράδειγμα

Τέσσερα δυνατά αποτελέσματα:

Τι ισχύει πραγματικά

Τι εγώ πιστεύω

	Κατάσταση του H0	
Απόφαση	Αληθής H0	Ψευδής H0
Διατήρηση του H0	1) Σωστή απόφαση	3) Σφάλμα τύπου ΙΙ (αστοχία)
Απόρριψη του H0	2) Σφάλμα τύπου Ι (εσφαλμένος συναγερμός)	4) Σωστή απόφαση

Παράδειγμα

$$H_0 : \mu \leq 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5$$

Σημασία των ορθών/εσφαλμένων αποφάσεων

	Κατάσταση του H0	
Απόφαση	Αληθής H0	Ψευδής H0
Διατήρηση του H0	1) Σωστή απόφαση	3) Σφάλμα τύπου II (αστοχία)
Απόρριψη του H0	2) Σφάλμα τύπου I (εσφαλμένος συναγερμός)	4) Σωστή απόφαση

$$H_0 : \mu \leq 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

1. Αν η H0 είναι πραγματικά αλήθεια (επειδή η βιταμίνη C δεν αυξάνει το IQ), τότε ορθά την διατηρούμε.
2. Αν η H0 είναι πραγματικά αλήθεια (επειδή η βιταμίνη C δεν αυξάνει το IQ), και εμείς συμπεραίνουμε ότι το αυξάνει τότε κάνουμε σφάλμα τύπου I. Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί σε άσκοπες ενέργειες (πχ χορήγηση της βιταμίνης) και καλείται εσφαλμένος συναγερμός

Σημασία των ορθών/εσφαλμένων αποφάσεων

	Κατάσταση του H0	
Απόφαση	Αληθής H0	Ψευδής H0
Διατήρηση του H0	1) Σωστή απόφαση	3) Σφάλμα τύπου II (αστοχία)
Απόρριψη του H0	2) Σφάλμα τύπου I (εσφαλμένος συναγερμός)	4) Σωστή απόφαση

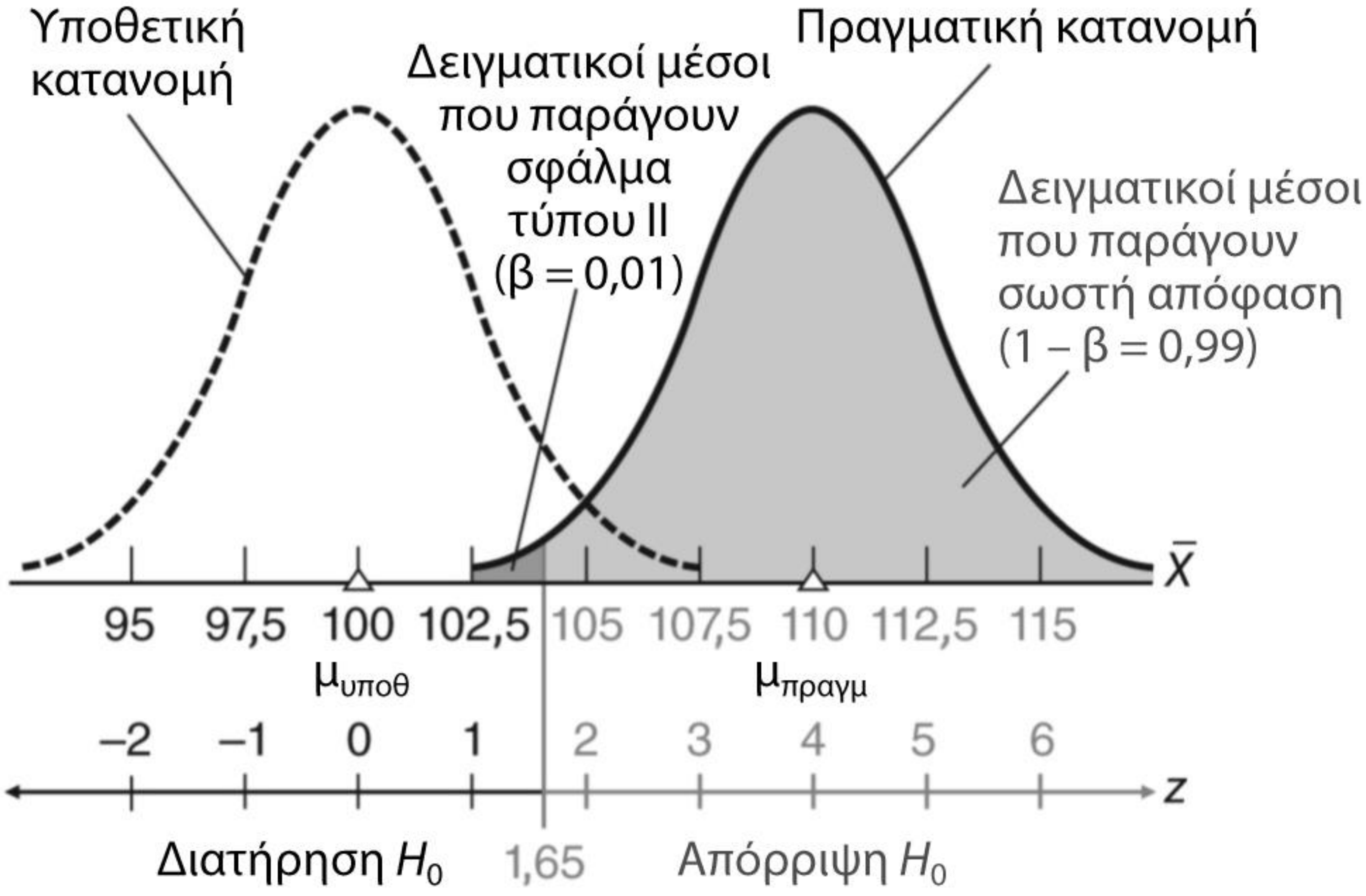
$$H_0 : \mu \leq 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

3. Αν η H0 είναι πραγματικά ψευδής (επειδή η βιταμίνη C αυξάνει το IQ), και εμείς συμπεραίνουμε ότι δεν το αυξάνει τότε κάνουμε σφάλμα τύπου II. Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί σε μη χορήγηση της βιταμίνης και καλείται αστοχία γιατί το δείγμα δεν κατάφερε να συγκεντρώσει την απαραίτητη απόδειξη για την σχέση βιταμίνης C και IQ
4. Αν η H0 είναι πραγματικά ψευδής (επειδή η βιταμίνη C αυξάνει το IQ), τότε ορθά την απορρίπτουμε.

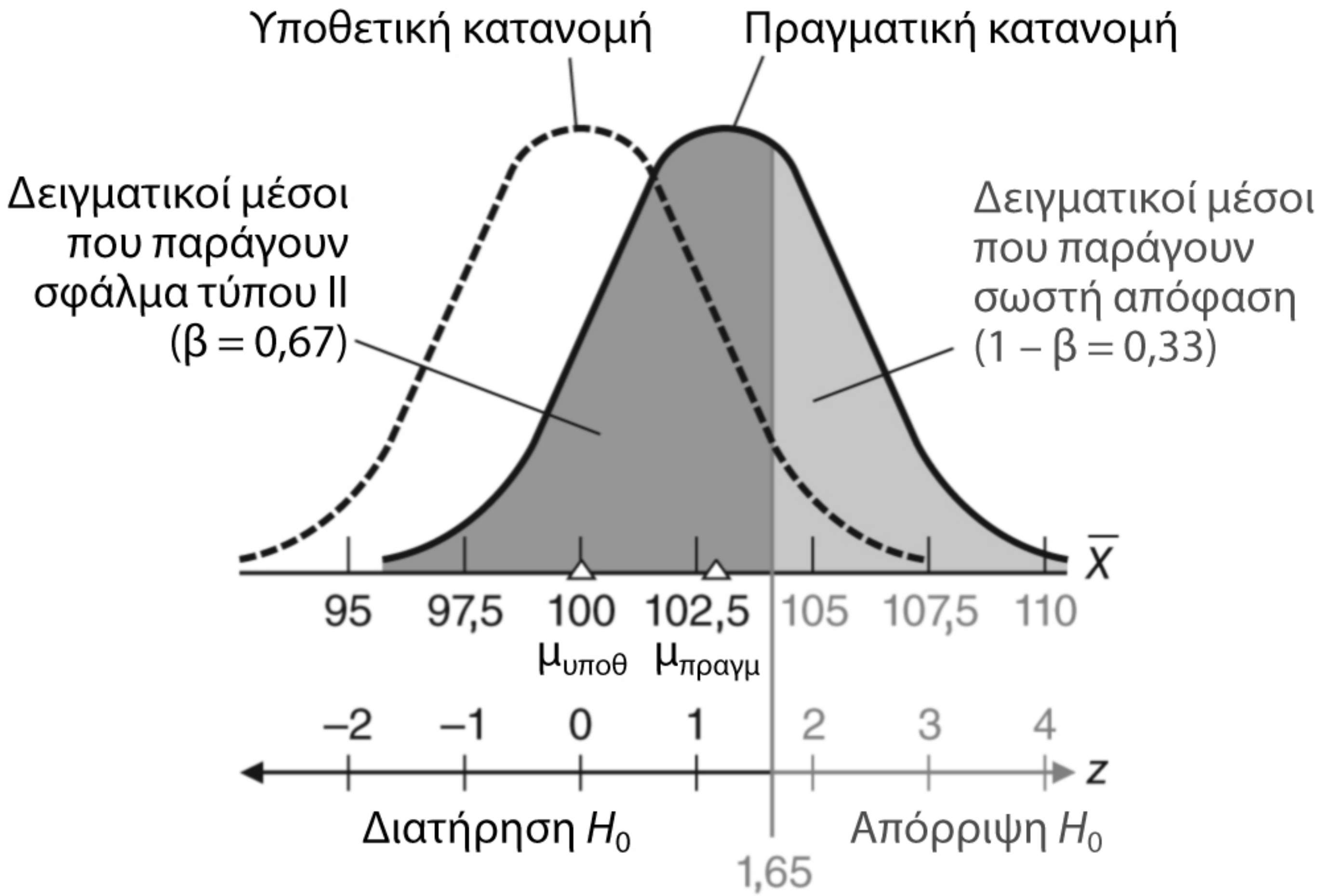
Έστω ότι η H0 είναι πραγματικά ψευδής εξαιτίας μιας μεγάλης επίδρασης

- Έστω ότι πραγματικά η βιταμίνη C έχει επίδραση (effect) 10 μονάδες αύξηση του μέσου
- Υποθετική κατανομή δειγματοληψίας είναι εκείνη που αντιστοιχεί σε δειγματοληψία του αρχικού πληθυσμού (δηλαδή IQ του γενικού πληθυσμού) και είναι η βάση του κανόνα απόφασης ως προς την σπανιότητα
- Πραγματική κατανομή δειγματοληψίας είναι η γονική κατανομή ενός τυχαία επιλεγμένου δείγματος. Από την κατανομή αυτή λαμβάνουμε ένα «σημείο» και υπολογίζουμε την z τιμή του.

Έστω ότι η H0 είναι πραγματικά ψευδής εξαιτίας μιας μεγάλης επίδρασης



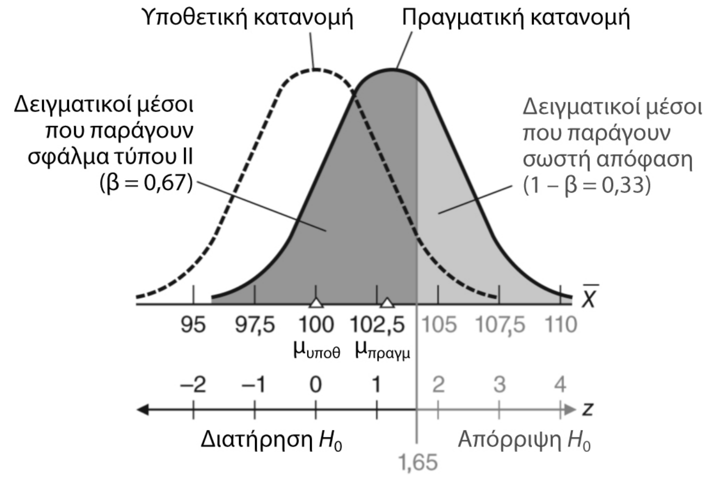
Έστω ότι η H0 είναι πραγματικά ψευδής εξαιτίας μιας μικρής επίδρασης



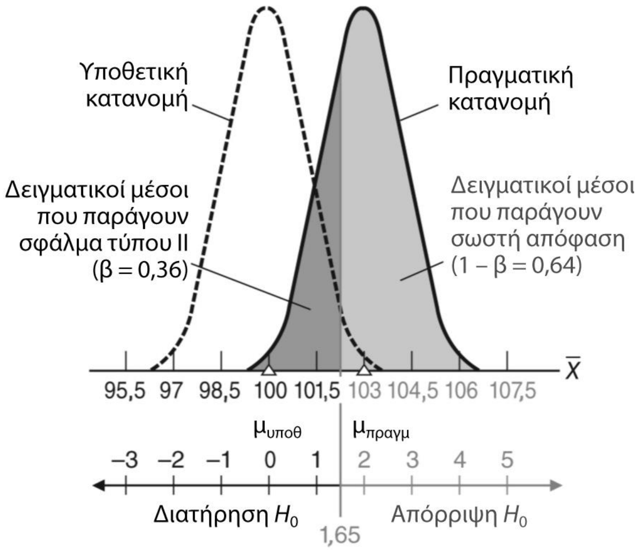
Επίδραση μεγέθους δείγματος

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{15}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5$$

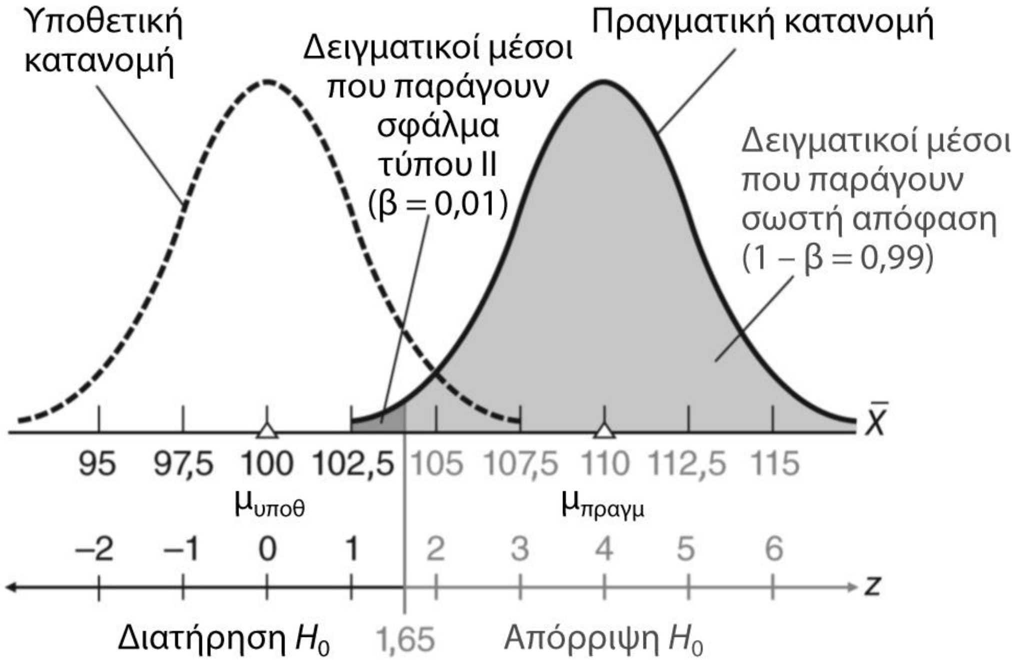


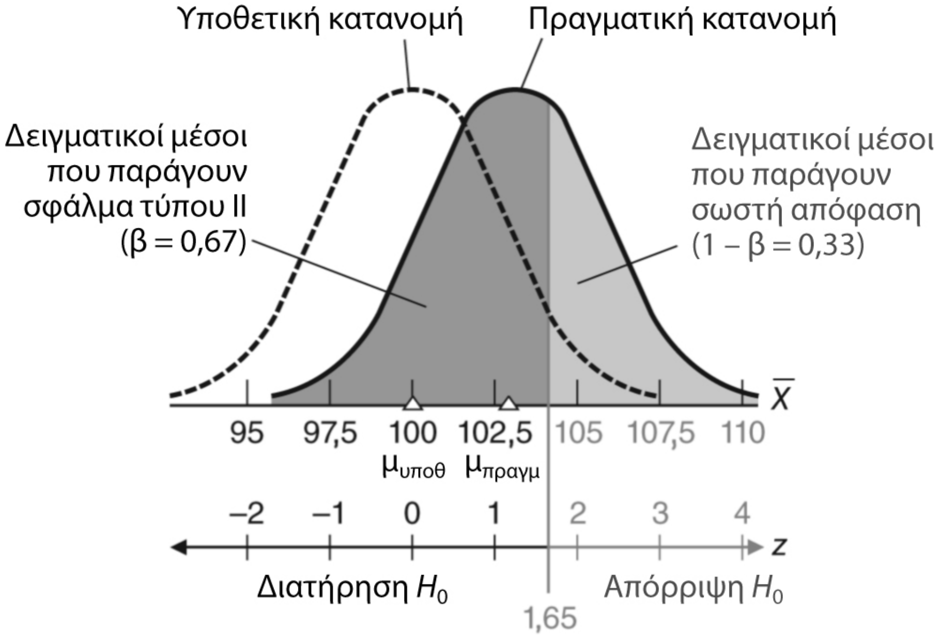
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$$



Ισχύς και μέγεθος δείγματος

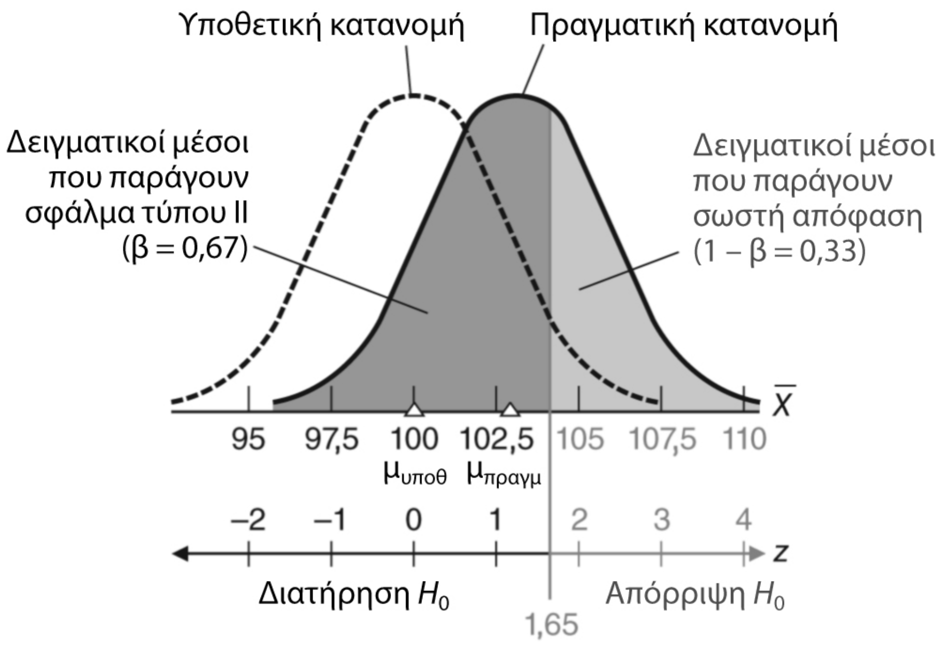
- Ισχύς είναι η πιθανότητα (1-β) ανίχνευσης μιας συγκεκριμένης επίδρασης όταν η μηδενική υπόθεση είναι πραγματικά ψευδής

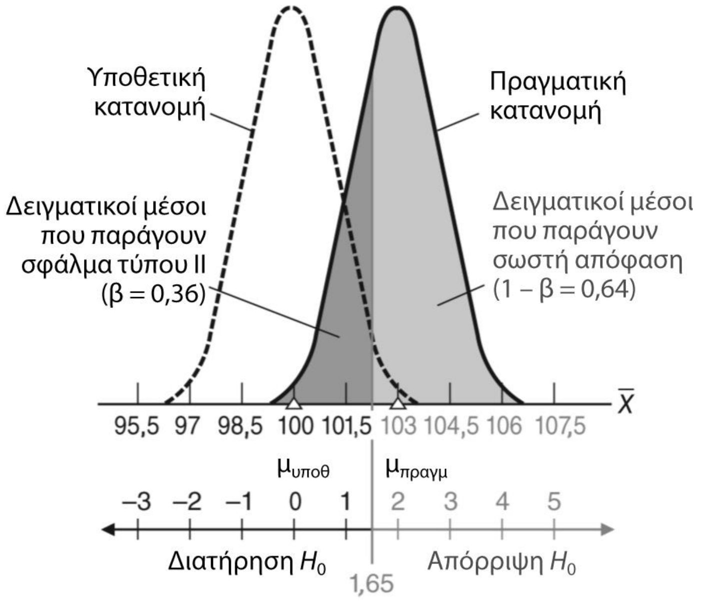




Ισχύς και μέγεθος δείγματος

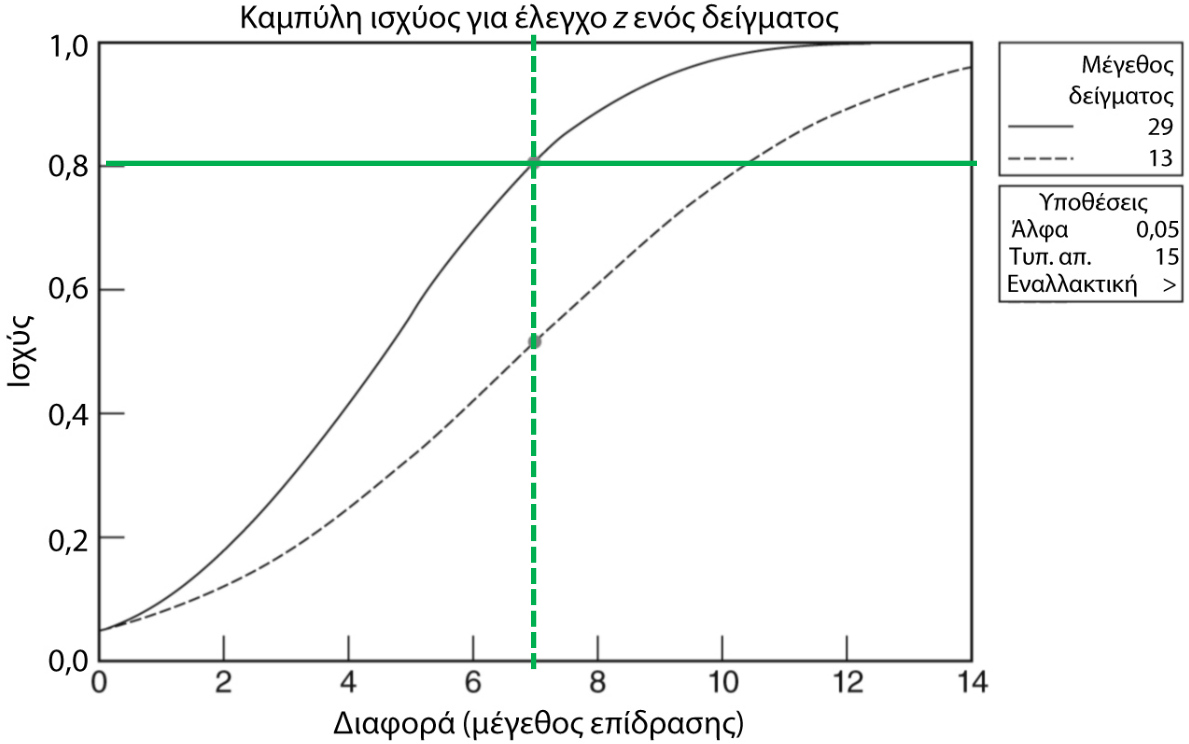
- Ισχύς είναι η πιθανότητα (1-β) ανίχνευσης μιας συγκεκριμένης επίδρασης όταν η μηδενική υπόθεση είναι πραγματικά ψευδής





Καμπύλες ισχύος

- Μας δείχνουν πως μεταβάλλεται η ισχύς για διαφορετικά μεγέθη επίδρασης (με πιθανή αντιπαραβολή διαφορετικών μεγεθών δείγματος)



Back up

«Σιωπηρές» υποθέσεις

- Ο έλεγχος z (δηλαδή ο στατιστικός έλεγχος που εκτιμά πόσο αποκλίνει ο παρατηρούμενος δειγματικός μέσος σε μονάδες τυπικού σφάλματος σε σχέση με το την υποτιθέμενη κατανομή δειγματοληψίας του μέσου), είναι ακριβής όταν:
- Ο πληθυσμός κατανέμεται κανονικά ή το δείγμα είναι μεγάλο ώστε να εφαρμόζεται με ακρίβεια το κεντρικό οριακό θεώρημα
- Η τυπική απόκλιση του πληθυσμούς είναι γνωστή