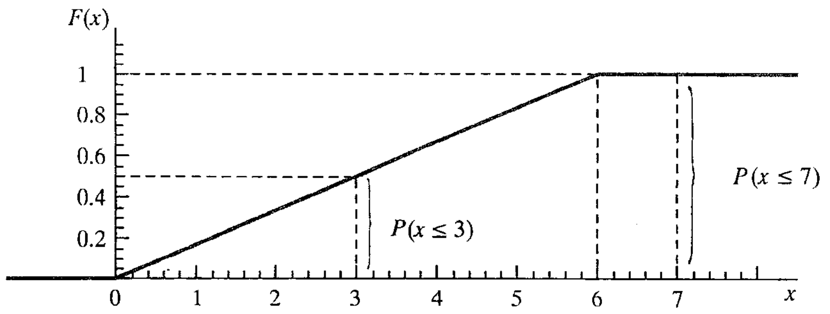
Η απόδειξη του (β) είναι επίσης απλή (παραλείπεται γιατί απαιτείται η εισαγωγή της έννοιας της συνέχειας της πιθανότητας στην οποία δεν έχουμε αναφερθεί).

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού πιθανοτήτων τυχαίας μεταβλητής όταν μας είναι γνωστή η συνάρτηση κατανομής της.

Η ποσότητα ελιών (σε τόνους) που επεξεργάζεται σε μια βάρδια λειτουργίας ένα ελαιοτριβείο περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x/6, & 0 \le x < 6 \\ 1, & 6 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της F φαίνεται στο *Σχήμα 5.2.5*. Ας δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες που αφορούν την τυχαία μεταβλητή X με βάση τη συνάρτηση κατανομής της, F.



Σχήμα 5.2.5.
Η συνάρτηση κατανομής F της τ.μ. X του Παραδείγματος 5.2.3.

(α) Η πιθανότητα το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να επεξεργαστεί το πολύ 3 τόνους είναι

$$P(X \le 3) = F(3) = 3/6 = 1/2$$

και η πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια το πολύ 7 τόνους είναι

$$P(X \le 7) = F(7) = 1.$$

Επίσης, η πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια λιγότερο από 3 τόνους είναι

$$P(X < 3) = F(3-) = 3/6 = 1/2$$

και η πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια λιγότερο από 7 τόνους είναι

$$P(X < 7) = F(7-) = 1.$$

(β) Η πιθανότητα το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να επεξεργαστεί περισσότερους από 4.5 τόνους είναι

$$P(X > 4.5) = 1 - P(X \leq 4.5) = 1 - F(4.5) = 1 - \frac{4.5}{6} = 0{,}25$$

ενώ η πιθανότητα να επεξεργασθεί σε μια βάρδια περισσότερους από 6 τόνους είναι

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = 1 - 1 = 0.$$

(γ) Η πιθανότητα το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να επεξεργαστεί περισσότερους από 2 και το πολύ 5.5 τόνους είναι

$$P(2 < X \leq 5.5) = F(5.5) - F(2) = \frac{5.5}{6} - \frac{2}{6} = 0.583.$$

(δ) Η πιθανότητα η ποσότητα που θα επεξεργαστεί το ελαιοτριβείο σε μια βάρδια να μην ξεπεράσει τους 5.5 τόνους δεδομένου ότι ήδη ξεπέρασε τους 2 τόνους είναι

$$P(X \leq 5.5 \mid X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 5.5)}{P(X > 2)} = \frac{F(5.5) - F(2)}{1 - F(2)} = \frac{3.5/6}{4/6} = 0.875.$$

Από την Πρόταση 5.2.2, εύκολα προκύπτει ότι

$$P(X \geq \alpha) = 1 - P(X < \alpha) = 1 - F(\alpha -)$$
$$P(\alpha \leq X \leq b) = F(b) - F(\alpha -)$$
$$P(\alpha < X < b) = F(b -) - F(\alpha)$$
$$P(\alpha \leq X < b) = F(b -) - F(\alpha -).$$
$$P(X = \alpha) = P(X \leq \alpha) - P(X < \alpha) = F(\alpha) - F(\alpha -)$$

Αν η F είναι και αριστερά συνεχής στο α, τότε $F(\alpha -) = F(\alpha)$ και επομένως, στην περίπτωση αυτή

$$P(X = \alpha) = 0.$$

Επίσης, στην περίπτωση αυτή προφανώς έχουμε

$$P(\alpha < X \leq b) = P(\alpha < X < b) = P(\alpha \leq X < b) = P(\alpha \leq X \leq b)$$
$$P(X \geq \alpha) = P(X > \alpha) \text{ και } P(X \leq b) = P(X < b).$$

Αν η F στο σημείο α δεν είναι αριστερά συνεχής, τότε στο σημείο αυτό παρουσιάζει άλμα ίσο με

$$F(\alpha) - F(\alpha -) = P(X = \alpha)$$

(θυμηθείτε και τα σχόλια που κάναμε στο Παράδειγμα 5.2.1).

προφανώς έχει τύπο

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}, & x = x_1, x_2, \ldots, x_\nu \\ 0, & x \neq x_1, x_2, \ldots, x_\nu. \end{cases}$$

Επίσης, αν F η συνάρτηση κατανομής της X, θεωρώντας (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu$, προφανώς έχουμε

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \frac{k}{\nu}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα ομοιόμορφης διακριτής τ.μ.

Παράδειγμα 5.3.3. *Σε μια παρτίδα 50 προϊόντων υπάρχει ένα ελαττωματικό. Τα προϊόντα ελέγχονται το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση, μέχρι να βρεθεί το ελαττωματικό.*

Αν X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό τον απαιτούμενων ελέγχων προφανώς έχουμε

$$R_X = \{1, 2, \ldots, 50\}$$

αφού για να βρεθεί το ελαττωματικό προϊόν μπορεί να χρειασθούν είτε ένας μόνο έλεγχος, είτε δύο, ... είτε πενήντα.

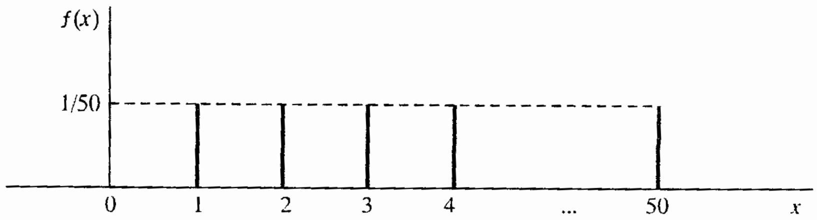
Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι οι δυνατές τιμές της X είναι ισοπίθανες, δηλαδή ότι για κάθε $x = 1, 2, \ldots, 50$ είναι

$$P(X = x) = \frac{1}{50}.$$

Η X επομένως είναι μια *διακριτή ομοιόμορφη* τ.μ στο $R_X = \{1, 2, \ldots, 50\}$ με συνάρτηση πιθανότητας f που έχει τύπο

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{50}, & x = 1, 2, \ldots, 50 \\ 0, & x \neq 1, 2, \ldots, 50 \end{cases}$$

και γραφικά φαίνεται στο *Σχήμα 5.3.3.*



Σχήμα 5.3.3.
Η συνάρτηση πιθανότητας της ομοιόμορφης διακριτής τ.μ. X με $R_X = \{1, 2, \ldots, 50\}$

Σημειώνουμε ότι το ισοπίθανο των δυνατών τιμών της X αποδεικνύεται εύκολα αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

E_i, $i = 1, 2, ..., 50$: *στον i-στο έλεγχο επιλέγεται το ελαττωματικό προϊόν* και παρατηρήσουμε (αφού θυμηθούμε και τον *πολλαπλασιαστικό τύπο*) ότι

$$P(X=1) = P(E_1) = \frac{1}{50}$$

$$P(X=2) = P(E_1'E_2) = P(E_1')P(E_2 | E_1') = \frac{49}{50}\cdot\frac{1}{49} = \frac{1}{50}$$

$$P(X=3) = P(E_1'E_2'E_3) = P(E_1')P(E_2'|E_1')P(E_3|E_1'E_2') = \frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{1}{48} = \frac{1}{50}$$

$$\vdots$$

$$P(X=50) = P(E_1'E_2' ... E_{49}'E_{50}) = P(E_1')P(E_2'| E_1') ... P(E_{50}|E_1'E_2' ... E_{49}') =$$

$$= \frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot ... \cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{50}.$$

Έτσι, η πιθανότητα για να βρεθεί το ελαττωματικό προϊόν να χρειασθούν

(α) ακριβώς 12 έλεγχοι είναι $P(X = 12) = f(12) = 1/50$

(β) το πολύ 12 έλεγχοι είναι $P(X \le 12) = f(1) + f(2) + ... + f(12) = 12/50$

ή (με χρήση της συνάρτησης κατανομής) $P(X \le 12) = F(12) = 12/50$

(γ) περισσότεροι από 30 αλλά όχι περισσότεροι από 40 έλεγχοι είναι $P(30 < X \le 40) = f(31) + f(32) + ... + f(40) = \underbrace{1/50 + 1/50 + ... + 1/50}_{10 \text{ όροι}} =$

$= 10/50$.

ή (με χρήση της συνάρτησης κατανομής)

$P(30 < X \le 40) = F(40) - F(30) = 40/50 - 30/50 = 10/50$.

Παράδειγμα 5.3.4.

Για ποια τιμή (ή τιμές) της σταθεράς $\lambda > 0$ η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, ...$$

(και $f(x) = 0$ για $x \ne 0, 1, 2, ...$) ικανοποιεί τις ικανές και αναγκαίες για μια συνάρτηση πιθανότητας ιδιότητες.

Απάντηση: Για να είναι μια συνάρτηση f συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ. αρκεί να είναι μη αρνητική, να παίρνει γνήσια θετικές τιμές σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών και οι τιμές της να έχουν άθροισμα ίσο με 1.

Πράγματι, η f παίρνει γνήσια θετικές τιμές σε αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών αφού για κάθε $x \ne 0, 1, 2, ...$ είναι $f(x) = 0$.

παράδειγμα, όταν θα μιλήσουμε για τη *διακύμανση* μιας τυχαίας μεταβλητής X, θα δούμε ότι είναι πολύ χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίσουμε τη *μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής X^2 η οποία προφανώς είναι συνάρτηση της X. Ας τη συμβολίσουμε με g. Έστω δηλαδή, $g(X) = X^2$. Ας δούμε με ένα πολύ απλό παράδειγμα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την $E(X^2)$.

Παράδειγμα 5.3.11. *Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο δυνατών τιμών $R_X = \{-1, 0, 1\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f με*

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = -1 \\ 0.7, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1. \end{cases}$$

Ζητάμε την $E(X^2)$.

Απάντηση: Ζητάμε τη μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X) = X^2$. Το σύνολο των δυνατών τιμών της Y προφανώς είναι

$$R_Y = \{0, 1\}.$$

Με βάση όσα μέχρι τώρα έχουμε πει, για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την $E(Y)$ πρέπει να γνωρίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y. Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των τιμών της, $P(Y = 0)$ και $P(Y = 1)$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πιθανότητας της X, έχουμε

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0.7 \text{ και } P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.3$$

επομένως η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} 0.7, & y = 0 \\ 0.3, & y = 1 \end{cases}$$

και επομένως, η ζητούμενη μέση τιμή είναι

$$E(X^2) = E(Y) = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.3 = 0.3.$$

Παρότι αυτός ο τρόπος υπολογισμού της μέσης τιμής συνάρτησης διακριτής τυχαίας μεταβλητής είναι προφανής και εύλογος, εντούτοις μπορεί να υπάρξουν δυσκολίες στον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της $Y = g(X)$. Η πρόταση που ακολουθεί είναι ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού της μέσης τιμής της Y *χωρίς να απαιτείται να γνωρίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητάς της*!

Πρόταση 5.3.3.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών

$$R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots\}$$

και συνάρτηση πιθανότητας f. Για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση g της X, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $g(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$E\,[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x) \tag{5.3.1}$$

εφόσον η σειρά $\sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$ συγκλίνει απόλυτα.

Δεν κρίνουμε σκόπιμο να δώσουμε την απόδειξη της πρότασης. Σημειώνουμε μόνο το εξής: όταν η X παίρνει τιμή x τότε η $g(X)$ παίρνει τιμή $g(x)$, επομένως, ο τύπος (5.3.1) είναι εύλογος και αναμενόμενος αν σκεφθούμε την $E[g(X)]$ ως τον σταθμισμένο μέσο των τιμών $g(x)$ με βάρος για κάθε $g(x)$ την πιθανότητα να πάρει η X την τιμή x.

Παράδειγμα 5.3.12.

Ο αριθμός των προϊόντων που πουλάει μια επιχείρηση σε διάστημα μιας εβδομάδας είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω X, με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.1, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1 \\ 0.6, & x = 2 \\ 0.1, & x = 3. \end{cases}$$

Έστω ότι το κέρδος από την πώληση ενός προϊόντος είναι 200€ και ότι τα πάγια εβδομαδιαία έξοδα της επιχείρησης είναι 100€. Ενδιαφερόμαστε για το αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος της επιχείρησης.

Απάντηση: Είναι φανερό ότι πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = g(X) = 200X - 100.$$

Από τον τύπο (5.3.1) έχουμε

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x) = \sum_{x \in R_X} (200x - 100) f(x) =$$

$$= (200 \cdot 0 - 100) \cdot 0.1 + (200 \cdot 1 - 100) \cdot 0.2 + (200 \cdot 2 - 100) \cdot 0.6 + \\ + (200 \cdot 3 - 100) \cdot 0.1 = 240.$$

Δηλαδή, το αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος της επιχείρησης είναι 240 €.

Παρατηρήστε ότι η $E\,(200X - 100)$ υπολογίστηκε απευθείας από την κατανομή της X και χωρίς να χρειασθεί να υπολογίσουμε την κατανομή της $Y = 200X - 100$.

Ως ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής του τύπου (5.3.1) ας δούμε πάλι το *Παράδειγμα 5.3.11.*

Παράδειγμα 5.3.11. (συνέχεια)

Έχουμε

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.7 + 1^2 \cdot 0.2 = 0.3.$$

Έτσι, η $E(X^2)$ υπολογίστηκε χωρίς να χρειασθεί να υπολογίσουμε την κατανομή της $Y = X^2$.

Θεώρημα 5.3.1. γραμμικότητα της μέσης τιμής

Αν X διακριτή τυχαία μεταβλητή και α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta.$$

Απόδειξη: Από τον τύπο (5.3.1) για $g(x) = \alpha X + \beta$ έχουμε

$$E[g(X)] = E(\alpha X + \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta) f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_i f(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta f(x_i) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \alpha E(X) + \beta.$$

Η ευκολία υπολογισμού της $E(\alpha X + \beta)$ με αξιοποίηση του τύπου $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$ είναι προφανής. Ας δούμε πάλι το *Παράδειγμα 5.3.12.*

Παράδειγμα 5.3.12. (συνέχεια)

Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της

$$Y = g(X) = 200X - 100$$

αξιοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής.

Η μέση τιμή της X είναι

$$E(X) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.1 = 1.7$$

επομένως έχουμε

$$E(200X - 100) = 200E(X) - 100 = 200 \cdot 1.7 - 100 = 240 \text{ €}.$$

Η ακόλουθη πρόταση αναφέρεται στη *μέση τιμή γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων διακριτής τυχαίας μεταβλητής*. Παρατηρήστε ότι ισχύει η ιδιότητα της γραμμικότητας. Η απόδειξη είναι πολύ απλή (δείτε τη ως άσκηση).

Πρόταση 5.3.1.

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $g_1, g_2, \ldots, g_k$ πραγματικές συναρτήσεις της X. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X) + \ldots + \alpha_k g_k(X)] =$$

$$= \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)] + \ldots + \alpha_k E[g_k(X)].$$

Περισσότερα για το νόημα, την ερμηνεία, τη χρησιμότητα και τον τρόπο υπολογισμού της *διαμέσου* και των *ποσοστιαίων σημείων* θα συζητήσουμε στην *Περιγραφική Στατιστική* όταν θα μιλήσουμε για την περιγραφή της κατανομής ενός δείγματος.

5.3.1.2 Παράμετροι διασποράς διακριτής τυχαίας μεταβλητής

α) Διακύμανση και τυπική απόκλιση διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Η θέση της κατανομής αποτελεί όπως είδαμε ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της. Ένα άλλο, επίσης σημαντικό και ουσιώδες χαρακτηριστικό της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, είναι η μεταβλητότητα/διασπορά των τιμών της. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά είναι εντελώς διαφορετικά. Η μέση τιμή μιας τ.μ. δε σημαίνει/συνεπάγεται κάτι για τη διασπορά των τιμών της. Δείτε, για παράδειγμα, τις κατανομές δύο τ.μ. X και Y.

x	-1	1
$P(X=x)$	0.5	0.5

y	-1000	1000
$P(Y=y)$	0.5	0.5

Και οι δύο έχουν ίδια μέση τιμή (ίση με 0), όμως διαφέρουν, και μάλιστα πάρα πολύ, ως προς το πόσο διασκορπισμένες είναι οι τιμές τους. Η *μέση τιμή* μας δίνει όπως είδαμε μια ένδειξη για τη θέση γύρω από την οποία παίρνει τιμές η τ.μ. (αφού ορίσθηκε ως σταθμισμένος μέσος τους), όμως, δε μας δίνει απολύτως καμία πληροφορία για το πόσο αυτές είναι διασκορπισμένες (ή συγκεντρωμένες) κάτι το οποίο ασφαλώς αποτελεί ουσιώδες χαρακτηριστικό της κατανομής. Σκεφθείτε επίσης το ακόλουθο παράδειγμα από το χώρο της οικονομίας.

Η απόδοση X μιας μετοχής, έστω Α, μπορεί να είναι 20%, 1% ή –20%, ανάλογα με το αν η οικονομία το ερχόμενο έτος βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας ή ύφεσης. Η απόδοση Y μιας άλλης μετοχής, έστω Β, μπορεί αντίστοιχα να είναι 3%, 1%, –3%. Για την οικονομία, η πιθανότητα να βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, στασιμότητας, ύφεσης, είναι αντίστοιχα 0.10, 0.80, 0.10. Σε ποια μετοχή θα επενδύατε; Παράδειγμα 5.3.13.

Απάντηση: Η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής Α είναι

$$\mu_X = E(X) = \sum_x xf(x) = 0.2\cdot 0.1 + 0.01\cdot 0.8 + (-0.2)\cdot 0.1 = 0.008$$

και της μετοχής Β είναι

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_y yf(y) = 0.03\cdot 0.1 + 0.01\cdot 0.8 + (-0.03)\cdot 0.1 = 0.008.$$

Δηλαδή, η αναμενόμενη απόδοση και για τις δυο επενδυτικές επιλογές είναι ίδια, 0.8%. Όμως, το ρίσκο στην περίπτωση της μετοχής Α είναι πολύ μεγαλύτερο, δηλαδή, οι απώλειες θα είναι πολύ μεγαλύτερες αν η οικονομία βρεθεί σε κατάσταση ύφεσης (όπως επίσης και τα κέρδη θα είναι μεγαλύτερα στην περίπτωση που η οικονομία βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης) και επομένως η επιλογή μετοχής εξαρτάται από το αν είμαστε διατεθειμένοι να αναλάβουμε υψηλό ή χαμηλό ρίσκο. Αυτή τη μεταβλητότητα στην απόδοση των μετοχών η μέση τιμή δε μπορεί να την εκφράσει και ασφαλώς αυτό δε μας ξενίζει αφού η μέση τιμή ορίσθηκε ως μέτρο θέσης και όχι ως μέτρο διασποράς. Για να μπορεί να εκφρασθεί με ποσοτικούς όρους η μεταβλητότητα/διασπορά των τιμών μιας τ.μ. έχουν ορισθεί, όπως ήδη αναφέραμε, οι *παράμετροι διασποράς*.

Αφού οι δυνατές τιμές μιας τ.μ., έστω X, βρίσκονται γύρω από τη μέση τιμή της $E(X) = \mu$, μια προφανής παράμετρος διασποράς θα μπορούσε να είναι η $E(X-\mu)$ δηλαδή, η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X-\mu$ που εκφράζει τις αποκλίσεις των τιμών της X από τη μέση τιμή της. Όμως, για οποιαδήποτε τ.μ., αυτή η μέση τιμή είναι μηδέν, αφού

$$E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $E(X-\mu)$ δε μας προσφέρει καμιά πληροφορία για τη διασπορά των τιμών της X. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι αυτό συμβαίνει γιατί οι θετικές αποκλίσεις ($X > \mu$) εξουδετερώνονται από τις αντίστοιχες αρνητικές ($X < \mu$), μια λογική παράμετρος διασποράς θα μπορούσε να είναι η $E(|X-\mu|)$. Αυτή η ποσότητα θα μπορούσε πράγματι να χρησιμοποιηθεί (και χρησιμοποιείται) ως μια παράμετρος διασποράς, όμως η παρουσία της απόλυτης τιμής δημιουργεί δυσκολίες στη μαθηματική διαχείρισή της. Γι' αυτό το λόγο, αντί των απόλυτων τιμών χρησιμοποιούνται τα τετράγωνα των αποκλίσεων. Φθάνουμε έτσι, στον ορισμό της *διακύμανσης* και της *τυπικής απόκλισης* τυχαίας μεταβλητής.

Ορισμός 5.3.3. (διακύμανση και τυπική απόκλιση διακριτής τυχαίας μεταβλητής)

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών

$$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots\}$$

και συνάρτηση πιθανότητας f. Έστω επίσης ότι υπάρχει η μέση τιμή $E(X) = \mu$. Διακύμανση (variance) της X ονομάζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $(X-\mu)^2$ (εφόσον υπάρχει) και συμβολίζεται με $Var(X)$ ή με σ^2, δηλαδή,

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mu)^2 f(x_i) \qquad (5.3.2)$$

ή

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x \in R_X}(x-\mu)^2 f(x).$$

Η (θετική) τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης της X,

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

ονομάζεται τυπική απόκλιση της X (standard deviation).

Όταν υπάρχει ανάγκη διάκρισης, η *διακύμανση* και η *τυπική απόκλιση* μιας τ.μ. X συμβολίζονται επίσης με σ_X^2 και σ_X αντίστοιχα.

Μια ανεπιθύμητη συνέπεια της εμφάνισης τετραγωνικής δύναμης στον ορισμό της *διακύμανσης* είναι ότι η μονάδα μέτρησής της δεν είναι η ίδια με τη μονάδα μέτρησης της τυχαίας μεταβλητής αλλά με το τετράγωνό της. Για παράδειγμα, αν η τ.μ. εκφράζεται σε € η διακύμανσή της εκφράζεται σε €^{2}. Στην *τυπική απόκλιση* το πρόβλημα αυτό ασφαλώς δεν εμφανίζεται.

Ας δούμε δύο παραδείγματα υπολογισμού της *διακύμανσης* και της *τυπικής απόκλισης* τυχαίας μεταβλητής.

Θα υπολογίσουμε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση της απόδοσης κάθε μετοχής.

Βρήκαμε ότι και των δύο μετοχών η μέση απόδοση είναι 0.008, δηλαδή

$$\mu_X = \mu_Y = 0.008.$$

Από τον τύπο ορισμού της διακύμανσης, έχουμε

$$\sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x-\mu_X)^2 f(x) =$$

$$= (0.2-0.008)^2 \cdot 0.1 + (0.01-0.008)^2 \cdot 0.8 + (-0.2-0.008)^2 \cdot 0.1 = 0.008$$

άρα $\sigma_X = \sqrt{0.008} = 0.089$

και

$$\sigma_Y^2 = \sum_{y \in R_Y} (y-\mu_Y)^2 f(y) =$$

$$= (0.03-0.008)^2 \cdot 0.1 + (0.01-0.008)^2 \cdot 0.8 + (-0.03-0.008)^2 \cdot 0.1 = 0.0002$$

άρα $\sigma_Y = \sqrt{0.0002} = 0.014$.

Παρατηρήστε ότι η τυπική απόκλιση της X είναι εξαπλάσια (περίπου) από την τυπική απόκλιση της Y.

Έστω X σταθερή τυχαία μεταβλητή, δηλαδή, έστω ότι X = c με πιθανότητα 1. Θα δείξουμε ότι Var(X) = 0.

Στο *Παράδειγμα 5.3.10* δείξαμε ότι

$$\mu = E(X) = c$$

άρα

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = (c-\mu)^2 P(X=c) = (c-c)^2 \cdot 1 = 0.$$