

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων και Τροφίμων,
Πανεπιστήμιο Πατρών



Διάλεξη 4η

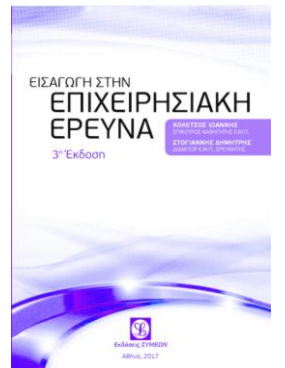
Ιστορική αναδρομή της μεθόδου Simplex

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Βασικοί ορισμοί

Βασικά θεωρήματα

Αλγόριθμος Simplex



5.1 έως 5.14

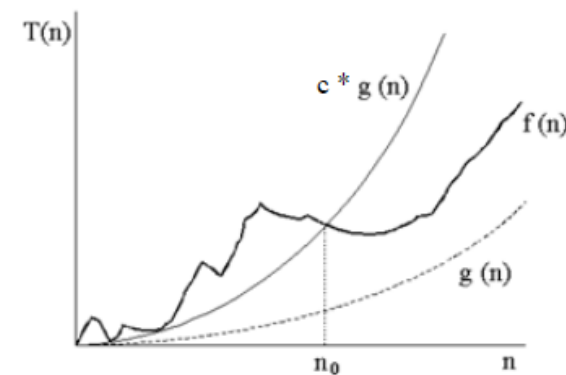
Complexity classes

- **complexity class** : A category of algorithm efficiency based on the algorithm's relationship to the input size N .

Class	Big-Oh	If you double N , ...	Example
constant	$O(1)$	unchanged	10ms
logarithmic	$O(\log_2 N)$	increases slightly	175ms
linear	$O(N)$	doubles	3.2 sec
log-linear	$O(N \log_2 N)$	slightly more than doubles	6 sec
quadratic	$O(N^2)$	quadruples	1 min 42 sec
cubic	$O(N^3)$	multiplies by 8	55 min
...
exponential	$O(2^N)$	multiplies drastically	$5 * 10^{61}$ years

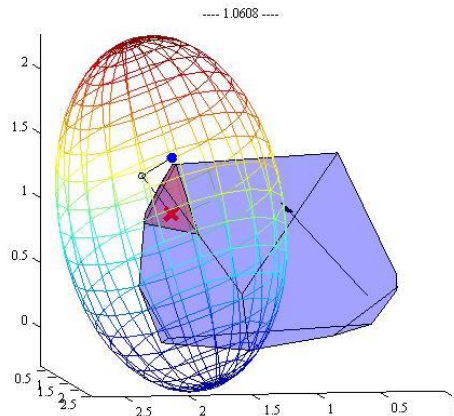
Big-Oh defined

- Big-Oh is about finding an *asymptotic upper bound*.
- Formal definition of Big-Oh:
 $f(N) = O(g(N))$, if there exists positive constants c , N_0 such that
 $f(N) \leq c \cdot g(N)$ for all $N \geq N_0$.
 - We are concerned with how f grows when N is large.
 - not concerned with small N or constant factors
 - Lingo: " $f(N)$ grows no faster than $g(N)$."

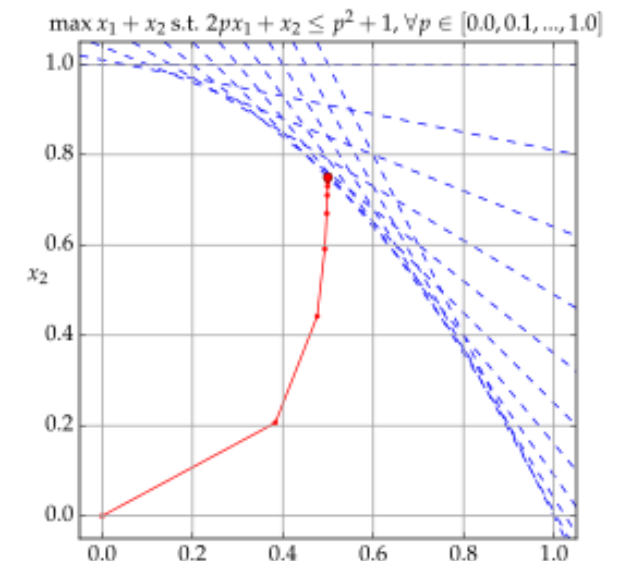


Ιστορική αναδρομή της μεθόδου Simplex (συν)

- Το 1979 ο L. Khachiyan ανακαλύπτει πολυωνυμικό αλγόριθμο.
 - Κακή αριθμητική συμπεριφορά και απόδοση χρόνου στην μέση περίπτωση.



- Το 1984 ο N. Karmarkar ανακαλύπτει πολυωνυμικό αλγόριθμο με καλή απόδοση χρόνου στην μέση περίπτωση.



Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Αντικειμενική συνάρτηση: Να βελτιστοποιηθεί (μεγιστοποιηθεί ή ελαχιστοποιηθεί):

$$\text{optimize } z = f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_2 \\ \vdots & & & & \dots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \{ \leq, =, \geq \} & b_m \end{array}$$

$$\text{και } x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Τα $a_{ij}, b_i, c_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ υποθέτουμε πως είναι γνωστές σταθερές.

Θεωρούμε πως για κάθε ένα περιορισμό μπορεί να ισχύει μόνο μία από τις σχέσεις $\leq, =, \geq$.

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Προς χάριν της τυποποίησης της διαδικασίας επίλυσης, η αλγεβρική αναπαράσταση του χώρου των λύσεων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι κατασκευασμένη υπό τις εξής δύο συνθήκες:

- Όλοι οι περιορισμοί (με εξαίρεση των περιορισμών μη - αρνητικότητας) είναι ισότητες με μη - αρνητικό δεξιό μέλος.
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη - αρνητικές.

Η μορφή που λαμβάνει οποιοδήποτε πρόβλημα Γ.Π. μετά την επιβολή των παραπάνω συνθηκών, καλείται **κανονική μορφή** ή **τυποποιημένη (standard form)**.

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Προκειμένου οι περιορισμοί να αναχθούν σε ισότητες, εισάγονται νέες μη-αρνητικές μεταβλητές οι **περιθώριες** μεταβλητές.

Ένας περιορισμός ανισότητας της μορφής " \leq ":

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i ,$$

μετατρέπεται σε ισότητα με μια μη-αρνητική περιθώρια μεταβλητή s , στην οποία αναφερόμαστε με την ονομασία **χαλαρή μεταβλητή (slack variable)**:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + s = b_i , \quad s \geq 0$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός - ανισότητα $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα:

$$3x_1 + 4x_2 + s = 12 , \quad s \geq 0$$

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Ένας περιορισμός της μορφής " \geq ":

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

μετατρέπεται σε ισότητα με την αφαίρεση μιας μη-αρνητικής περιθώριας μεταβλητής s , την **πλεονασματική μεταβλητή (surplus variable)**:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - s = b_i, \quad s \geq 0$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός-ανισότητα $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 24$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα,

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 - s = 24, \quad s \geq 0$$

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Επιτυγχάνουμε το δεξιό μέλος να είναι μη-αρνητικό, πολλαπλασιάζοντας και τις 2 πλευρές με (-1), όποτε αυτό είναι απαραίτητο.

Παραδείγματος χάριν, ο περιορισμός

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq -13$$

είναι ισοδύναμος με την ισότητα

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + s = -13, \quad s \geq 0,$$

που με τη σειρά της, αφού πολλαπλασιαστεί με (-1) παίρνει την τελική της μορφή

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - s = 13,$$

όπου έχει προκύψει ένα μη-αρνητικό δεξιό μέλος, όπως ήταν επιθυμητό.

Μεταβλητές χωρίς πρόσημο

Αν μία μεταβλητή μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, μηδέν ή αρνητική) την εκφράζουμε ως διαφορά δύο θετικών μεταβλητών.

Για παράδειγμα, ο περιορισμός $25x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$ όπου x_3 δεν έχει καθορισμένο πρόσημο, μετατρέπεται στον $25x_1 + 2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 200$ με $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, όπου $x_3^+, x_3^- \geq 0$.

Αν $x_3^+ > 0$ και $x_3^- = 0$, τότε η x_3^+ αντιπροσωπεύει έλλειμμα, αλλιώς αν $x_3^- > 0$ και $x_3^+ = 0$, τότε η x_3^- αντιπροσωπεύει πλεόνασμα. Η λύση του προβλήματος δε μπορεί να πάρει θετικές τιμές για τις x_3^+ και x_3^- ταυτόχρονα.

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γ.Π. στην κανονική του μορφή υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\max (\text{ή } \min) z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Ορισμοί των λύσεων του προβλήματος:

- **Λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.
- **Δυνατή ή εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας.
- **Βέλτιστη εφικτή λύση** του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε εφικτή λύση αυτού που **βελτιστοποιεί** την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

$$\max \text{ (ή } \min) z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\mathbf{b} \geq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Βάση του συστήματος των περιορισμών

Σε ένα σύνολο από m εξισώσεις με n μεταβλητές ($m < n$), αν θέσουμε $(n - m)$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν και στη συνέχεια λύσουμε τις m εξισώσεις για τις εναπομείναντες m μεταβλητές, τότε η λύση που προκύπτει, αν είναι μοναδική, αντιστοιχεί σε ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων.

Βασικές και μη βασικές μεταβλητές

- Ο τετραγωνικός $m \times m$ πίνακας που προκύπτει από τον **A** και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες καλείται βάση του συστήματος και θα συμβολίζεται με **B**.
- Οι m μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μίας βάσης **B** καλούνται **βασικές** (ή εξαρτημένες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.
- Οι υπόλοιπες $(n - m)$ μεταβλητές που αντιστοιχούν στις $(n - m)$ στήλες του **A** που δεν περιλαμβάνονται στη βάση **B** καλούνται **μη βασικές** (ή ανεξάρτητες) **μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή.

Βασικές λύσεις

Ορισμοί των λύσεων του προβλήματος:

- Λύση του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος δηλαδή κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ που ικανοποιεί το σύστημα αυτό.
- Δυνατή ή εφικτή λύση του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε λύση του συστήματος που ικανοποιεί τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας.
- Βέλτιστη εφικτή λύση του προβλήματος Γ.Π. καλείται κάθε εφικτή λύση αυτού που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

$$\begin{aligned} \max \quad & (z) \quad z = f(x) = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad (b \geq 0) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- **Βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μία βάση B , καλείται μία (εφικτή) λύση αυτού, η οποία έχει το όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.
- **Εκφυλισμένη βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος m γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, καλείται κάθε βασική (εφικτή) λύση του συστήματος στην οποία μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές έχουν μηδενική τιμή, δηλαδή κάθε βασική (εφικτή) λύση που έχει λιγότερες από m μεταβλητές διάφορες του μηδενός (θετικές) και τις υπόλοιπες ίσες με το μηδέν.

Βασικά Θεωρήματα

Θεώρημα 1: Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 2: Η αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος Γ.Π. λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή της σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.

Βασικά της μεθόδου Simplex

Βασικές λύσεις

- **Βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μία βάση B , καλείται μία (εφικτή) λύση αυτού, η οποία έχει το όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.
- **Εκφυλισμένη βασική (εφικτή) λύση** ενός συστήματος m γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, καλείται κάθε βασική (εφικτή) λύση του συστήματος στην οποία μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές έχουν μηδενική τιμή, δηλαδή κάθε βασική (εφικτή) λύση που έχει λιγότερες από m μεταβλητές διάφορες του μηδενός (θετικές) και τις υπόλοιπες ίσες με το μηδέν.

16

- Οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες και το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι όλες μη αρνητικές λύσεις του συστήματος των m εξισώσεων με τις n μεταβλητές όπου $m \leq n$.
- Προσδιορίζουμε τις βασικές εφικτές λύσεις του παραπάνω συστήματος.
- Επιλέγουμε την βασική εφικτή λύση που βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Ο Αλγόριθμος Simplex

Πρόβλημα μεγιστοποίησης

- **Βήμα 1^ο** : Υπολογίζουμε μια αρχική λύση x_B επιλέγοντας την βάση B από τις στήλες του πίνακα A και για την λύση αυτή, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Το μοντέλο του γενικού προβλήματος Γ.Π. στην κανονική του μορφή υπό μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{aligned} \max \text{ (ή min) } z &= f(x) = c^T x \\ Ax &= b, \quad (b \geq 0) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

12

Κανονική μορφή του προβλήματος Γ.Π.

Προς χάρη της τυποποίησης της διαδικασίας επίλυσης, η αλγεβρική αναπαράσταση του χώρου των λύσεων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι κατασκευασμένη υπό τις εξής δύο συνθήκες:

- Όλοι οι παραρσμοί (με εξαίρεση των παραρσμών μη - αρνητικότητας) είναι ισότητες με μη - αρνητικά δεξιά μέλη.
- Όλες οι μεταβλητές είναι μη - αρνητικές.

Η μορφή που λαμβάνει οποιαδήποτε πρόβλημα Γ.Π. μετά την επιβολή των παραπάνω συνθηκών, καλείται **κανονική μορφή** ή **τυποποιημένη (standard form)**.

7

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Ένας παραρσμός της μορφής " \geq ":

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b,$$

μετατρέπεται σε ισότητα με την αφαίρεση μιας μη αρνητικής παραθώρας μεταβλητής s , την **πλεονασματική μεταβλητή (surplus variable)**:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - s = b, \quad s \geq 0$$

Για παράδειγμα, ο παραρσμός ανισότητα $x_1 + 4x_2 = 6x_3 - 24$ είναι ισοδύναμος με την εξής ισότητα:

$$x_1 + 4x_2 - 6x_3 - s = -24, \quad s \geq 0$$

8

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Επιταχύνουμε το δεξιά μέλος να είναι μη αρνητικό, πολλαπλασιάζοντας και τις 2 πλευρές με (-1), όπως αυτό είναι απαραίτητο.

Παράδειγματος χάρη, ο παραρσμός:

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 13$$

είναι ισοδύναμος με την ισότητα

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -13, \quad s \geq 0,$$

που με τη σειρά της αφού πολλαπλασιαστεί με (-1) παίρνει την τελική της μορφή

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - s = 13,$$

όπου έχει προκύψει ένα μεταρρητικό δεξιά μέλος, όπως ήταν επιθυμητό.

10

Μεταβλητές χωρίς πρόσημο

Αν μία μεταβλητή μπορεί να λαμβάνει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (θετική, μηδέν ή αρνητική) την εκφράζουμε ως διαφορά δύο θετικών μεταβλητών.

Για παράδειγμα, ο παραρσμός $25x_1 + 2x_2 = 200$ όπου x_1 δεν έχει καθορισμένο πρόσημο, μετατρέπεται στον $25x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$ με $x_1 = x_1' - x_3'$, όπου $x_1', x_3' \geq 0$.

Αν $x_1' > 0$ και $x_3' = 0$, τότε η x_1' αντιπροσωπεύει ελάχιστο, αλλιώς αν $x_3' > 0$ και $x_1' = 0$, τότε η x_3' αντιπροσωπεύει πλεόνασμα. Η λύση του προβλήματος δε μπορεί να πάρει θετικές τιμές για τις x_1' και x_3' ταυτόχρονα.

11

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 2^ο** : Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα A που δεν ανήκουν στην βάση, συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες y_j έτσι ώστε $a_j = By_j$ (δηλαδή τα διανύσματα με στοιχεία $y_{ij} = B^{-1}a_j$)

Βάση του συστήματος των περιορισμών

Σε ένα σύνολο από m εξισώσεις με n μεταβλητές ($m < n$), αν θέσουμε $(n-m)$ μεταβλητές ίσες με το μηδέν και στη συνέχεια λύσουμε τις m εξισώσεις για τις εναπομείναντες m μεταβλητές, τότε η λύση που προκύπτει, αν είναι μοναδική, αντιστοιχεί σε ακρότατο σημείο του χώρου των λύσεων.

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 3^ο** : Υπολογίζουμε τις τιμές z_j για τα διανύσματα εκτός βάσης κάνοντας χρήση της σχέσης $z_j = c_B^T y_j$

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 4^ο** : Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - A. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση
 - B. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέγουμε το μη βασικό διάνυσμα a_k να εισέλθει στην βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο $c_k - z_j = \min_i \{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- **Βήμα 5^ο :**

A. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση.

B. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα εγκαταλείψει την βάση, σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\theta = \frac{x_{b_r}}{y_{rj}} = \min_i \left\{ \frac{x_{b_r}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

Μη φραγμένη λύση: όταν οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα, χωρίς να παραβιάζουν κάποιον από τους περιορισμούς. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων είναι μη φραγμένος προς τουλάχιστον μια κατεύθυνση.

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

• **Βήμα 6^ο** : Υπολογίζουμε

A. την νέα βάση B αντικαθιστώντας τα διανύσματα b_r με το μη-βασικό διάνυσμα a_k

B. Τη νέα βασική εφικτή λύση από τις σχέσεις

$$\widehat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ για } i = 1, 2, \dots, m \text{ και } i \neq r$$
$$\widehat{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$$

C. τις νέες τιμές των y_{ij} , $z_i - c_j$ και z

Ο Αλγόριθμος Simplex (συν)

- Επιστρέφουμε στο 2^ο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Παράδειγμα

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\max z = x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3$$

Υπό των περιορισμών:

$$x_1 + 2 * x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- **Βήμα 1^ο**: Υπολογίζουμε μια αρχική λύση x_B επιλέγοντας την βάση B από τις στήλες του πίνακα A και για την λύση αυτή, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.



Παράδειγμα (βήμα 1^ο)

- Μετατροπή σε κανονική μορφή
- Αντικειμενική συνάρτηση:**

$$\max z = x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3 + 0 * s_1$$

Υπό των περιορισμών:

$$x_1 + 2 * x_2 + x_3 + s_1 = 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- **Βήμα 1^ο**: Υπολογίζουμε μια αρχική λύση x_B επιλέγοντας την βάση B από τις στήλες του πίνακα A και για την λύση αυτή, την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.



Παράδειγμα (βήμα 1^ο)

- Επιλέγουμε ως αρχική βάση τα διανύσματα a_1 και a_4 .

$$\text{Οπότε } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Η αρχική λύση προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$Bx_b = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Συνεπώς η λύση είναι $[x_1, x_2, x_3, s_1] = [30, 0, 0, 10]$ και η αντικ. συνάρτηση $z = 1 * 30 + 2 * 0 + 3 * 0 + 0 * 10 = 30$.

- Η αρχική εφικτή λύση είναι $x_b = [30, 10]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (βήμα 2^ο)

- **Βήμα 2^ο**: Εκφράζουμε τα διανύσματα του πίνακα A που δεν ανήκουν στην βάση, συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες y_j έτσι ώστε $a_j = By_j$ (δηλαδή τα διανύσματα με στοιχεία $y_{ij} = B^{-1}a_j$)

Βήμα του αλγόριθμου του παραδείγματος

$$\bullet a_2 = By_2 \rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet a_3 = By_3 \rightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (βήμα 3°)

- Από τον τύπο $z_j = c_B^T y_j$ και λόγω του ότι η βάση αποτελείται τα

x_1 και s_1

$$x_1 + 2 * x_2 + 3 * x_3 + 0 * s_1 \longrightarrow c_b = [1, 0]^T$$

- Από το 2° βήμα ξέρουμε:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow z_2 = c_B^T y_2 = [1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow z_3 = c_B^T y_3 = [1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$c_b = [1, 0]^T \quad c_b = [1, 0]^T$$

Παράδειγμα (βήμα 4^ο)

- **Βήμα 4^ο** : Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - A. Αν για όλα τα j ισχύει ότι $z_j - c_j \geq 0$, τότε έχουμε βέλτιστη λύση
 - B. Αν ένα ή περισσότερα $z_j - c_j < 0$, επιλέγουμε το μη βασικό διάνυσμα a_k να εισέλθει στην βάση εφαρμόζοντας το κριτήριο $c_k - z_k = \min_i \{z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0\}$

- Υπολογίζουμε τις ποσότητες $z_j - c_j$
 - $z_2 - c_2 = 1 - 2 = -1 < 0$
 - $z_3 - c_3 = 1 - 3 = -2 < 0$
- Το διάνυσμα a_3 εισέρχεται στην βάση

Παράδειγμα (βήμα 5^ο)

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_b = [30, 10]^T$$

- Υπολογίζουμε ποιο διάνυσμα θα δώσει την θέση του στο α_3

σύμφωνα με το κριτήριο $\theta = \frac{x_{br}}{y_{rj}} = \min_i \left\{ \frac{x_{br}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0 \right\}$

- Δηλαδή $\min_{i=1,2} \left\{ \frac{x_{b1}}{y_{13}}, \frac{x_{b2}}{y_{23}} \right\} = \left\{ \frac{30}{1}, \frac{10}{0} \right\} \rightarrow i = 1$
- Το διάνυσμα α_1 εγκαταλείπει την βάση.

• Βήμα 5^ο :

- A. Αν όλα τα $y_{ik} \leq 0$, τότε υπάρχει μια μη φραγμένη λύση.
 B. Αν ένα τουλάχιστον $y_{ik} > 0$, επιλέγουμε το διάνυσμα b_r που θα εγκαταλείψει την βάση, σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\theta = \frac{x_{b_r}}{y_{rj}} = \min_i \left\{ \frac{x_{b_r}}{y_{rj}}, y_{ij} > 0 \right\}$$

Μη φραγμένη λύση: όταν οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα, χωρίς να παραβιάζουν κάποιον από τους περιορισμούς. Δηλαδή ο χώρος των λύσεων είναι μη φραγμένος προς τουλάχιστον μία κατεύθυνση.

• **Βήμα 6°** : Υπολογίζουμε

A. την νέα βάση B αντικαθιστώντας τα διανύσματα b_r με το μη-βασικό διάνυσμα a_k

B. Τη νέα βασική εφικτή λύση από τις σχέσεις
 $\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ij}}{y_{rj}}$ για $i = 1, 2, \dots, m$ και $i \neq r$
 $\hat{x}_{Br} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}}$

C. τις νέες τιμές των y_{ij} , $z_i - c_j$ και z

Παράδειγμα (βήμα 6°)

- Νέα βάση $\hat{B} = (\alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Νέα τιμή της αντικ. συνάρτησης $\hat{z} = z + \frac{x_{b1}}{y_{13}} (c_3 - z_3) = 30 + 30 * 2 = 90$

Παράδειγμα (βήμα 7^ο)

- Επιστρέφουμε στο 2^ο βήμα για μια ακόμη επανάληψη