



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 5: Εφαρμογές Γραμμικού  
Προγραμματισμού (1<sup>ο</sup> μέρος)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών  
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

# Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού (1<sup>ο</sup> μέρος)

Υποενότητα 1

# Σκοποί 1<sup>ης</sup> υποενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές το πως μπορεί να εφαρμοστεί ο Γραμμικός Προγραμματισμός για την μοντελοποίηση και την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων
  - Επιλογή χαρτοφυλακίου
  - Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός
  - Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων



# Περιεχόμενα 1<sup>ης</sup> υποενότητας

- Επιλογή χαρτοφυλακίου
- Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός
- Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(1/17)

- Αποτελεί πρόβλημα χρηματοοικονομικής το οποίο αντιμετωπίζουν τα αρμόδια διευθυντικά στελέχη τραπεζών, εταιρειών επενδύσεων, εταιρειών αμοιβαίων κεφαλαίων, κ.ά.
- Αφορά στην επιλογή ενός πακέτου χρεογράφων (μετοχών, ομολόγων, κ.ά.) από ένα σύνολο εναλλακτικών επενδύσεων



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(2/17)

- Αντικειμενικός σκοπός
  - Η μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης απόδοσης (ή του ποσοστού αυτής) των χρεογράφων ή η ελαχιστοποίηση του αντίστοιχου κινδύνου
- Περιορισμοί
  - Διαθέσιμο κεφάλαιο προς επένδυση
  - Πολιτική της εταιρείας
  - Διάρκεια οικονομικής ζωής των επενδύσεων
  - Δυνητικός ρυθμός ανάπτυξης επενδύσεων
  - Κίνδυνος
  - Ρευστότητα κεφαλαίου κίνησης



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(3/17)

- Έστω μια εταιρεία επενδύσεων η οποία ενδιαφέρεται να επενδύσει σε χρεόγραφα ένα μέρος από τα ρευστά διαθέσιμά της, το οποίο ανέρχεται σε 90 εκατομμύρια €
- Ο χρηματοοικονομικός αναλυτής της εταιρείας προτείνει να επενδυθεί το ποσό αυτό σε μετοχές δύο συγκεκριμένων κλάδων καθώς και σε αμοιβαία κεφάλαια



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(4/17)

- Προτεινόμενες μετοχές
  - Α και Β (κατασκευαστικού κλάδου)
  - Γ και Δ (κλάδου τροφίμων και ποτών)
- Αμοιβαία κεφάλαια
  - Εταιρειών Ε και Ζ
- Η προσδοκώμενη ετήσια απόδοσή των μετοχών και των αμοιβαίων δίνεται από τον πίνακα της επόμενης διαφάνειας





# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(5/17)

Επένδυση	Προσδοκώμενο ετήσιο ποσοστό απόδοσης (%)
Μετοχή Α	15.4
Μετοχή Β	19.2
Μετοχή Γ	18.7
Μετοχή Δ	13.5
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ε	17.8
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ζ	16.3



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(6/17)

- Οδηγίες οικονομικού διευθυντή
  1. Το ποσό που θα επενδυθεί στις μετοχές ενός κλάδου να μην υπερβαίνει το μισό του συνολικού διαθέσιμου ποσού
  2. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή με τη μεγαλύτερη απόδοση σε κάθε κλάδο, να μην υπερβαίνει το 80% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στον κλάδο αυτό



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(7/17)

- Οδηγίες οικονομικού διευθυντή
  3. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή Β να μην υπερβαίνει το 10% του ποσού που θα επενδυθεί σε όλες τις μετοχές
  4. Το ποσό που θα επενδυθεί σε αμοιβαία κεφάλαια να είναι το πολύ 25% του ποσού που θα επενδυθεί στις μετοχές των εταιρειών του κατασκευαστικού κλάδου



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(8/17)

- Μεταβλητές απόφασης
  - $x_1$ : ποσό επένδυσης στη μετοχή Α
  - $x_2$ : ποσό επένδυσης στη μετοχή Β
  - $x_3$ : ποσό επένδυσης στη μετοχή Γ
  - $x_4$ : ποσό επένδυσης στη μετοχή Δ
  - $x_5$ : ποσό επένδυσης στο αμοιβαίο κεφάλαιο Ε
  - $x_6$ : ποσό επένδυσης στο αμοιβαίο κεφάλαιο Ζ



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(9/17)

- Αντικειμενική συνάρτηση
  - $\text{Max } z = 0,154x_1 + 0,192x_2 + 0,187x_3 + 0,135x_4 + 0,178x_5 + 0,163x_6$



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(10/17)

- Περιορισμοί
  1. Το συνολικό ποσό επένδυσης να μην υπερβαίνει τα 90 εκατομμύρια €  
–  $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leq 90000$  (χιλ. €)



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(11/17)

- Περιορισμοί
  2. Το ποσό που θα επενδυθεί στις μετοχές κάθε κλάδου να μην υπερβαίνει το μισό του συνολικού ποσού
    - $x_1 + x_2 \leq 45000$  (χιλ. €)
    - $x_3 + x_4 \leq 45000$  (χιλ. €)



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(12/17)

- Περιορισμοί

3. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή με τη μεγαλύτερη απόδοση σε κάθε κλάδο να μην υπερβαίνει το 80% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στον κλάδο αυτό

$$- x_2 \leq 0,8(x_1+x_2) \Rightarrow -0,8x_1 + 0,2x_2 \leq 0$$

- κατασκευαστικός κλάδος

$$- x_3 \leq 0,8(x_3+x_4) \Rightarrow 0,2x_3 - 0,8x_4 \leq 0$$

- κλάδος τροφίμων και ποτών





# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(13/17)

- Περιορισμοί
  4. Το ποσό που θα επενδυθεί στη μετοχή B να μην υπερβαίνει το 10% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί σε όλες τις μετοχές
    - $x_2 \leq 0,1(x_1+x_2+x_3+x_4) \Rightarrow$
    - $-0,1x_1 + 0,9x_2 - 0,1x_3 - 0,1x_4 \leq 0$



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(14/17)

- Περιορισμοί

5. Το ποσό που θα επενδυθεί σε αμοιβαία κεφάλαια να είναι το πολύ 25% του συνολικού ποσού που θα επενδυθεί στις μετοχές του κατασκευαστικού κλάδου

$$- x_5 + x_6 \leq 0,25(x_1+x_2) \Rightarrow$$

$$- -0,25x_1 - 0,25x_2 + x_5 + x_6 \leq 0$$



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(15/17)

- Περιορισμοί
  6. Μη αρνητικότητα
    - $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6$



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(16/17)

- Λύση

Χρεόγραφο	Επενδυόμενο ποσό	Προσδοκώμενη απόδοση	Συνολική προσδοκώμενη απόδοση
Μετοχή Α	27900	15,40	4296,6
Μετοχή Β	8100	19,20	1555,2
Μετοχή Γ	36000	18,70	6732,0
Μετοχή Δ	9000	13,50	1215,0
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ε	9000	17,80	1602,0
Αμοιβαίο κεφάλαιο Ζ	0	16,30	0,0
Σύνολο	90000	17,11	15400,8



# Επιλογή Χαρτοφυλακίου(17/17)

- Ερμηνεία λύσης
  - $s_1 = 0$
  - $s_2 = 9000$
  - $s_3 = 0$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (1/10)

1. Μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσης των επενδύσεων κατά την περίοδο προγραμματισμού
2. Ελαχιστοποίηση του συνολικού ποσού που απαιτείται για την κάλυψη μελλοντικών υποχρεώσεων της επιχείρησης
3. Βελτιστοποίηση κάποιας συγκεκριμένης συνάρτησης που εκφράζει το στόχο της επιχείρησης



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (2/10)

- Πρόβλημα
  - Επένδυση 80 εκατομμυρίων € ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση κατά τους επόμενους τέσσερις μήνες
- 2 εναλλακτικές επενδύσεις
  1. Διμηνιαία ομόλογα δημοσίου με απόδοση 3% για περίοδο 2 μηνών
  2. Τριμηνιαία γραμμάτια δημοσίου με απόδοση 6,5% για περίοδο τριών μηνών



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (3/10)

- Τα ποσά που δε θα επενδυθούν στις δύο παραπάνω επενδύσεις μπορούν να κατατεθούν σε τράπεζα με μηνιαία απόδοση 1%
- Οι επενδύσεις γίνονται στην αρχή κάθε μήνα
- Στην αρχή του 5<sup>ου</sup> μήνα η επιχείρηση θα πρέπει να επενδύσει 40 εκατομμύρια € σε άλλη επένδυση
- Απόφαση του οικονομικού διευθυντή
  - Να μην είναι επενδυμένο οποιαδήποτε στιγμή ποσό μεγαλύτερο από 32 εκατομμύρια € είτε σε διμηνιαία ομόλογα είτε σε τριμηνιαία γραμμάτια (για διαφοροποίηση στο χαρτοφυλάκιο)





# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (4/10)

- Μεταβλητές απόφασης
  - $B_j$ : επενδυόμενο ποσό σε διμηνιαία ομόλογα στην αρχή του μήνα  $j$
  - $\Gamma_j$ : επενδυόμενο ποσό σε τριμηνιαία γραμμάτια στην αρχή του μήνα  $j$
  - $\Delta_j$ : επενδυόμενο ποσό στην τράπεζα στην αρχή του μήνα  $j$
  - $j=1,2,3,4$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (5/10)

- Αντικειμενική συνάρτηση

– Max  $z =$

$$0,03B_1 + 0,03B_2 + 0,03B_3 + 0,03B_4 + 0,065\Gamma_1 + 0,065\Gamma_2 + 0,065\Gamma_3 + 0,065\Gamma_4 + 0,01\Delta_1 + 0,01\Delta_2 + 0,01\Delta_3 + 0,01\Delta_4$$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (6/10)

- Περιορισμοί
  - Επενδυόμενο ποσό στην αρχή κάθε μήνα = Διαθέσιμο ποσό στην αρχή κάθε μήνα
  - 1<sup>ος</sup> μήνας
    - $B_1 + \Gamma_1 + \Delta_1 = 80000$  (χιλιάδες €)
  - 2<sup>ος</sup> μήνας
    - $B_2 + \Gamma_2 + \Delta_2 = \Delta_1 + 0,01 \Delta_1 \Rightarrow$   
 $B_2 + \Gamma_2 - 1,01 \Delta_1 + \Delta_2 = 0$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (7/10)

- Περιορισμοί
  - Επενδύόμενο ποσό στην αρχή κάθε μήνα = Διαθέσιμο ποσό στην αρχή κάθε μήνα
  - 3<sup>ος</sup> μήνας
    - $B_3 + \Gamma_3 + \Delta_3 = B_1 + 0,03 B_1 + \Delta_2 + 0,01\Delta_2$   
 $\Rightarrow -1,03B_1 + B_3 + \Gamma_3 -1,01\Delta_2 + \Delta_3 = 0$
  - 4<sup>ος</sup> μήνας
    - $B_4 + \Gamma_4 + \Delta_4 = B_2 + 0,03B_2 + \Gamma_1 + 0,065\Gamma_1 + \Delta_3 + 0,01\Delta_3 \Rightarrow$   
 $-1,03B_2 + B_4 + -0,065\Gamma_1 + \Gamma_4 -1,01\Delta_3 + \Delta_4 = 0$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (8/10)

- Περιορισμοί

- Διαθέσιμο ποσό στην αρχή του 5<sup>ου</sup> μήνα = 40 εκατομμύρια €

- $B_3 + 0,03B_3 + \Gamma_2 + 0,065\Gamma_2 + \Delta_4 + 0,01\Delta_4 \geq 40000 \Rightarrow$

- $1,03B_3 + 1,065\Gamma_2 + 1,01\Delta_4 \geq 40000$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (9/10)

- Περιορισμοί
  - Να μην είναι οποιαδήποτε στιγμή επενδυμένο ποσό μεγαλύτερο από 32 εκατομμύρια € είτε σε ομόλογα είτε σε γραμμάτια
    - $B_1 \leq 32000$
    - $B_1 + B_2 \leq 32000$
    - $B_2 + B_3 \leq 32000$
    - $B_3 + B_4 \leq 32000$
    - $\Gamma_1 \leq 32000$
    - $\Gamma_1 + \Gamma_2 \leq 32000$
    - $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \leq 32000$
    - $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \leq 32000$



# Χρηματοοικονομικός προγραμματισμός (10/10)

- Λύση

Επένδυση	Ποσό	Απόδοση	Συνολική απόδοση
$B_1$	32.000.000	0,030	960.000
$B_3$	19.557.842	0,030	586.735
$B_4$	12.442.157	0,030	373.265
$\Gamma_1$	32.000.000	0,065	2.080.000
$\Gamma_4$	32.000.000	0,065	2.080.000
$\Delta_1$	16.000.000	0,010	160.000
$\Delta_2$	16.160.000	0,010	161.600
$\Delta_3$	29.723.750	0,010	297.237
$\Delta_4$	19.658.834	0,010	196.588
		Σύνολο	6.895.425



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (1/11)

- Κατανομή από μια εταιρία κατά τη διάρκεια μίας ή περισσότερων χρονικών περιόδων των περιορισμένων κεφαλαίων της, μεταξύ διαφορετικών προγραμμάτων επενδύσεων, έτσι ώστε να επιλέξει εκείνα τα προγράμματα που μεγιστοποιούν τη συνολική καθαρή παρούσα αξία των κεφαλαίων της





# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (2/11)

- Πρόβλημα
  - Επιλογή από μια επιχείρηση, μεταξύ 5 ανεξάρτητων επενδύσεων, εκείνες που μεγιστοποιούν τη συνολική καθαρή παρούσα αξία των κεφαλαίων της και συγχρόνως ικανοποιούν τους περιορισμούς του προϋπολογισμού της
  - Κάθε επένδυση είναι διαιρετή, που σημαίνει ότι επιτρέπεται η μερική αποδοχή της, πλην όμως δεν επιτρέπεται να αναληφθεί περισσότερο από μία φορά



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (3/11)

- Χρηματικές εισροές προβλήματος (σε εκατομμύρια €)

Έτος	Επένδυση				
	1	2	3	4	5
1	38	11	17	8	25
2	41	16	24	11	28
3	54	15	29	13	35
4	-	20	-	19	46



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (4/11)

- Χρηματικές εκροές προβλήματος (σε εκατομμύρια €)

Έτος	Επένδυση					Διαθέσιμο ποσό
	1	2	3	4	5	
0	34	10	16	9	31	55
1	13	5	8	4	10	28
2	14	6	10	6	13	30
3	17	6	11	7	12	37
4	-	8	-	5	16	30



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (5/11)

- Χρηματικές ροές προβλήματος (σε εκατ. €)
  - ΚΠΑ: Καθαρή Παρούσα Αξία
  - ΣΠΕ: Συντελεστής Προεξόφλησης Επιτοκίου

Έτος	Επένδυση					ΣΠΕ
	1	2	3	4	5	10%
0	-34	-10	-16	-9	-31	1,000
1	25	6	9	4	15	0,909
2	27	10	14	5	15	0,826
3	37	9	18	6	23	0,751
4	-	12	-	14	30	0,683
<b>ΚΠΑ</b>	<b>38,14</b>	<b>18,67</b>	<b>17,26</b>	<b>12,83</b>	<b>32,79</b>	



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (6/11)

- Μεταβλητές απόφασης
  - $x_j$ : το ποσοστό της επένδυσης  $j$  ( $j=1,2,3,4,5$ ) που γίνεται αποδεκτό στη βέλτιστη λύση



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (7/11)

- Αντικειμενική συνάρτηση
  - $\text{Max } z = 38,14x_1 + 18,67x_2 + 17,26x_3 + 12,83x_4 + 32,79x_5$



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (8/11)

- Περιορισμοί
  - Χρηματικές εκροές των επενδύσεων των περιόδων μέχρι το διαθέσιμο ποσό κάθε έτους
    - $34x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 9x_4 + 31x_5 \leq 55$
    - $13x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 10x_5 \leq 28$
    - $14x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 13x_5 \leq 30$
    - $17x_1 + 6x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 12x_5 \leq 37$
    - $8x_2 + 5x_4 + 16x_5 \leq 30$



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (9/11)

- Περιορισμοί
  - $0 \leq x_j \leq 1, j=1,2,3,4,5$
  - Επεξηγήσεις
    - $x_j = 1$ : η επένδυση  $j$  γίνεται αποδεκτή στο σύνολό της
    - $x_j = 0$ : η επένδυση  $j$  απορρίπτεται
    - $x_j = 0.6$ : η επένδυση  $j$  θα γίνει αποδεκτή κατά 60%, εφόσον κάποιος τρίτος την αναλάβει κατά το υπόλοιπο 40%





# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (10/11)

- Λύση

Μεταβλητή	Τιμή	ΚΠΑ	Συνολική ΚΠΑ
$x_1$	1,000	38,14	38,1400
$x_2$	1,000	18,67	18,6700
$x_3$	0,125	17,26	2,1575
$x_4$	1,000	12,83	12,8300
$x_5$	0,000	32,79	0,0000
Σύνολο			71,7975



# Επιλογή επενδύσεων σε καθεστώς περιορισμένων κεφαλαίων (11/11)

- Ερμηνεία λύσης
  - $s_1=0$  (αρχή 1<sup>ου</sup> έτους)
  - $s_2=5$  (τέλος 1<sup>ου</sup> έτους – αρχή 2<sup>ου</sup> έτους)
  - $s_3=2,75$  (τέλος 2<sup>ου</sup> έτους – αρχή 3<sup>ου</sup> έτους)
  - $s_4=5,625$  (τέλος 3<sup>ου</sup> έτους – αρχή 4<sup>ου</sup> έτους)
  - $s_5=17$  (τέλος 4<sup>ου</sup> έτους – αρχή 5<sup>ου</sup> έτους)



**Τέλος Υποενότητας 1**

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**Σημειώματα**

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Επιχειρησιακή Έρευνα. Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού (1<sup>ο</sup> μέρος)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT119>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

