Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-2020

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- Μια κατασκευαστική εταιρία κατασκευάζει εξοχικές κατοικίες κοντά σε γνωστά θέρετρα της Εύβοιας
- Η εταιρία προγραμματίζει τη διαφημιστική της εκστρατεία για την προώθηση των πωλήσεων των εξοχικών της η οποία θα ξεκινήσει τον Ιούνιο και θα διαρκέσει μέχρι το τέλος του Αυγούστου

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- Η διαφήμιση θα γίνει στην τηλεόραση και ειδικότερα σε δύο διαφημιστικές ζώνες, την πρωινή και τη βραδινή
- Το κόστος μιας προβολής στην πρωινή ζώνη είναι 150.000 €, ενώ στη βραδινή ζώνη είναι 250.000 €
- Δημοσκοπήσεις έχουν δείξει ότι την πρωινή ζώνη στην περιοχή της Αττικής την παρακολουθούν κατά μέσο όρο 30.000 γυναίκες και 5.000 άνδρες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- Από την άλλη, τη βραδινή ζώνη την παρακολουθούν κατά μέσο όρο 20.000 γυναίκες και 25.000 άνδρες
- Η εταιρία αποσκοπεί να παρακολουθήσουν τη διαφήμιση κατά την περίοδο προγραμματισμού τουλάχιστον 1.500.000 γυναίκες και 900.000 άνδρες, επιδιώκοντας επαναλήψεις τηλεθέασης της διαφήμισης από τα ίδια άτομα
- Επίσης, πιστεύει ότι θα πρέπει να γίνουν τουλάχιστον 20 προβολές στη βραδινή ζώνη

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Ερώτημα**
  - Πόσες προβολές πρέπει να γίνουν σε κάθε ζώνη, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος, αλλά να ικανοποιούνται συγχρόνως οι απαιτήσεις τηλεθέασης καθώς και ο ελάχιστος αριθμός προβολών στη βραδινή ζώνη;

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1: αριθμός προβολών στην πρωινή ζώνη
  - x_2: αριθμός προβολών στη βραδινή ζώνη

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Αντικειμενική συνάρτηση**
  - Συνολικό κόστος προβολών =
    κόστος προβολών στην πρωινή ζώνη + κόστος προβολών στη βραδινή ζώνη =
    (κόστος πρωινής προβολής · αριθμός πρωινών εκπομπών) + (κόστος βραδινής προβολής · αριθμός βραδινών εκπομπών) =
    $150.000 \cdot x_1 + 250.000 \cdot x_2$
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2$**
    όπου κάθε μεταβλητή έχει μονάδα μέτρησης τα 100.000 €

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Περιορισμοί προβλήματος – 1^{ος} περιορισμός**
  - σύνολο γυναικών που θα δουν πρωινές προβολές + σύνολο γυναικών που θα δουν βραδινές προβολές ≥ ελάχιστος αριθμός γυναικών που θα δουν τη διαφήμιση
  - $30.000x_1 + 20.000x_2 \geq 1.500.000$
  - $\mathbf{0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 15}$

    όπου η μονάδα μέτρησης είναι οι εκατοντάδες χιλιάδες γυναίκες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Περιορισμοί προβλήματος – 2ος περιορισμός**
  - σύνολο ανδρών που θα δουν πρωινές προβολές + σύνολο ανδρών που θα δουν βραδινές προβολές ≥ ελάχιστος αριθμός ανδρών που θα δουν τη διαφήμιση
  - $5.000x_1 + 25.000x_2 \geq 900.000$
  - $\mathbf{0,05x_1 + 0,25x_2 \geq 9}$

    όπου η μονάδα μέτρησης είναι οι εκατοντάδες χιλιάδες άνδρες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- **Περιορισμοί προβλήματος – 3ος περιορισμός**
  - ο ελάχιστος αριθμός προβολών που θα πρέπει να γίνουν στη βραδινή ζώνη είναι 20
  - $\mathbf{x_2 \geq 20}$
- **Περιορισμοί προβλήματος – 4ος περιορισμός**
  - και οι δύο μεταβλητές απόφασης παίρνουν τιμές μη αρνητικές
  - $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης

- Συνολικό μοντέλο
  - **Minimize $z = 1,5x_1 + 2,5x_2$**

με περιορισμούς:

- **$0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 15$**
- **$0,05x_1 + 0,25x_2 \geq 9$**
- **$x_2 \geq 20$**
- **$x_1, x_2 \geq 0$**

Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

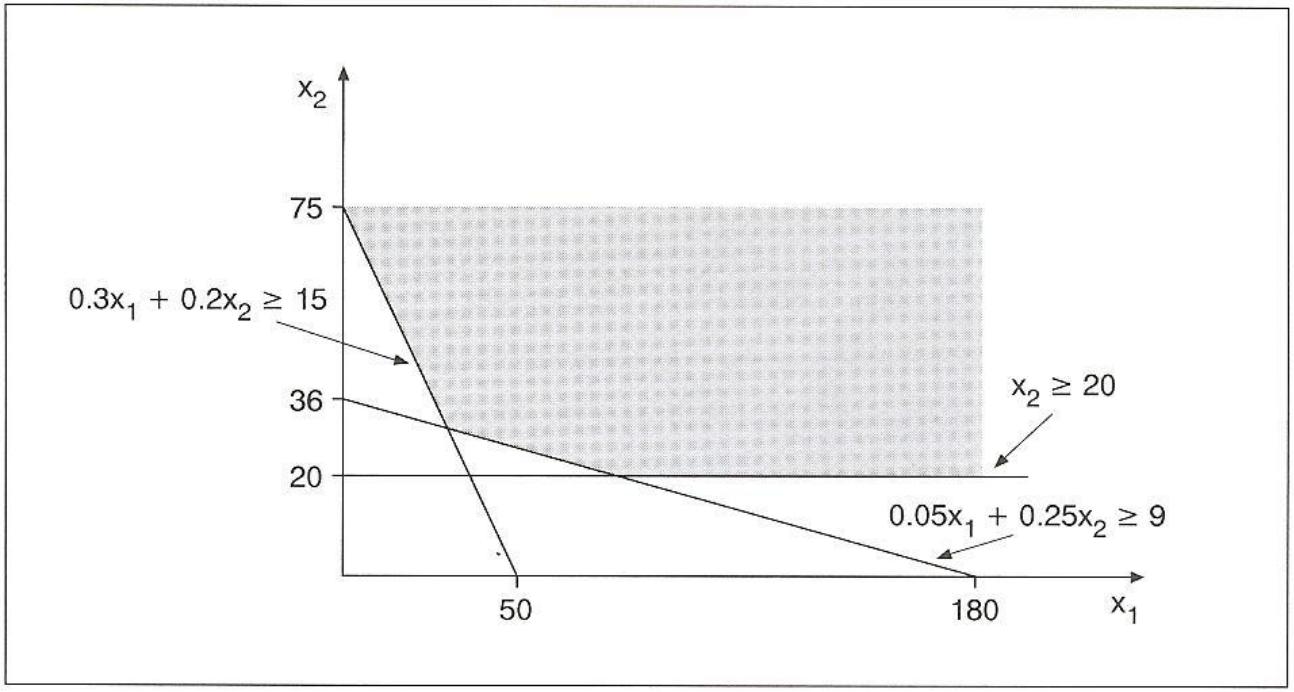
- $x_1>0$
- $x_2>0$

- Άρα βρισκόμαστε στο 1ο τεταρτημόριο

Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $0,3x_1 + 0,2x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = -1,5x_1 + 75$
- $0,05x_1 + 0,25x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = -0,2x_1 + 36$
- $x_2 = 20$

Γραφική Επίλυση του Μοντέλου



Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**(x_1, x_2)**	**z**	
Α	(30, 30)	120	Βέλτιστη
Β	(80, 20)	170	
Γ	(0, 75)	187,5	
Δ	(180, 20)	320	

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- **Μεταβλητή Πλεονασμού**
  - Η ποσότητα κατά την οποία υπερβαίνει το αριστερό μέλος του περιορισμού τη σταθερά του δεξιού μέλους σε ένα περιορισμό με φορά "≥" (μεγαλύτερο)
  - Έχει μηδενική τιμή για τους δεσμευτικούς πλεονασμούς με φορά "≥" και θετικές τιμές για τους μη δεσμευτικούς

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Σε κάθε περιορισμό i αντιστοιχεί μια χαλαρή μεταβλητή πλεονασμού e_i, $i = 1, \ldots, N$, όπου N το πλήθος των περιορισμών
- Η προσθήκη των μεταβλητών πλεονασμού οδηγεί στην **τυποποιημένη μορφή** του προβλήματος, όπου όλοι οι περιορισμοί του έχουν μετατραπεί σε ισότητες και τα δεξιά μέλη είναι μη αρνητικά

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Τυποποιημένη μορφή
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$**

  με περιορισμούς:
    - **$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 1e_1 = 15$**
    - **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 - 1e_2 = 9$**
    - **$x_2 - 1e_3 = 20$**
    - **$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0$**

Παραλλαγή

- Έστω ότι στη βραδινή ζώνη υπάρχει η δυνατότητα καταχώρησης 40 το πολύ προβολών λόγω χρονικού περιορισμού
- Ο 3ος περιορισμός παίρνει τη μορφή
  - $x_2 \leq 40$

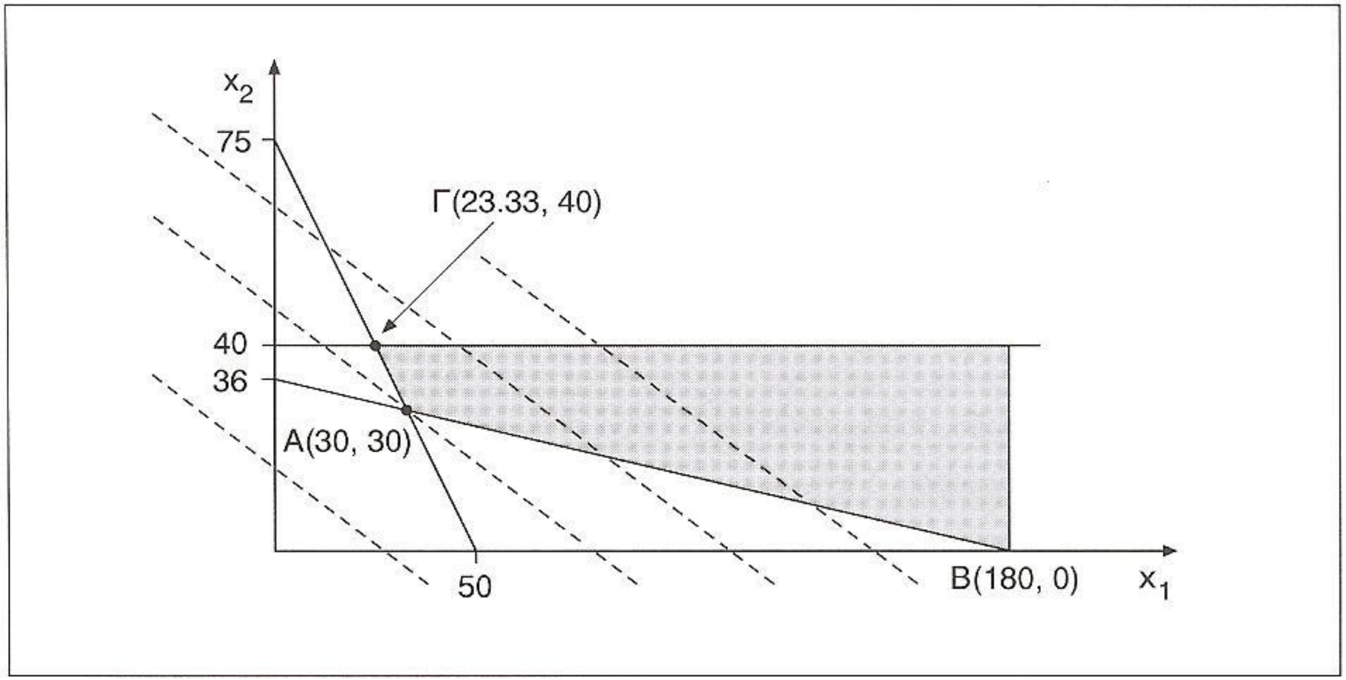
Παραλλαγή

- Νέα τυποποιημένη μορφή
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0s_3$**

  με περιορισμούς:
    - $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 1e_1 = 15$
    - $0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 - 1e_2 = 9$
    - $x_2 + 1s_3 = 40$
    - $x_1, x_2, e_1, e_2, s_3 \geq 0$

  - **e_1, e_2: μεταβλητές πλεονασμού**
  - **s_3: χαλαρή μεταβλητή**

Παραλλαγή



Παραλλαγή

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**(x_1, x_2)**	**z**	
Α	(30, 30)	120	Βέλτιστη
Β	(180, 0)	270	
Γ	(23,33 , 40)	135	
Δ	(180, 40)	370	

Ειδικές Περιπτώσεις

- Προβλήματα
  - με άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις
  - χωρίς εφικτές λύσεις
  - μη φραγμένα
    - περιπτώσεις όπου η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μεγάλη (ή μικρή) τιμή σε προβλήματα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης)

- Οι περιπτώσεις αυτές δεν εμφανίζονται συχνά σε πραγματικά προβλήματα
  - οφείλονται συνήθως σε σφάλματα που ενσωματώθηκαν στο μοντέλο κατά τη φάση της ανάπτυξής του

Παράδειγμα

- Έστω μια μικρή επιχείρηση δερμάτινων ενδυμάτων με την επωνυμία «Leather»
- Η εταιρία αναλαμβάνει κυρίως εργασίες για μεγάλες επιχειρήσεις ενδυμάτων που πραγματοποιούν εξαγωγές
- Η μηνιαία απασχόληση του προσωπικού της σε ώρες είναι 960

Παράδειγμα

- Για τον επόμενο μήνα έχει αναλάβει την παραγωγή των προϊόντων
  - Ανδρικό δερμάτινο σακάκι
  - Γυναικείο καστόρινο φόρεμα
- Τα υλικά που χρησιμοποιεί είναι
  - Κατεργασμένα δέρματα
  - Φόδρες

Παράδειγμα

- Κάθε γυναικείο φόρεμα απαιτεί
  - 5 μέτρα δέρματος
  - 3 μέτρα φόδρας
  - 6 ώρες εργασίας
- Κάθε ανδρικό σακάκι απαιτεί
  - 4 μέτρα δέρματος
  - 1 μέτρο φόδρας
  - 8 ώρες εργασίας

Παράδειγμα

- Το περιθώριο κέρδους είναι
  - 200 € για κάθε σακάκι
  - 250 € για κάθε φόρεμα
- Η επιχείρηση στην αρχή του μήνα διαθέτει
  - 600 μέτρα δέρμα
  - 297 μέτρα φόδρα

Παράδειγμα

- Σκοπός
  - Να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής για τον επόμενο μήνα, δηλαδή εκείνο το πρόγραμμα παραγωγής γυναικείων φορεμάτων και ανδρικών σακακιών που μεγιστοποιεί το συνολικό περιθώριο κέρδους, λαμβάνοντας υπόψη τους διάφορους περιορισμούς που υπάρχουν

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_1: τεμάχια γυναικείου φορέματος
  - x_2: τεμάχια ανδρικού σακακιού

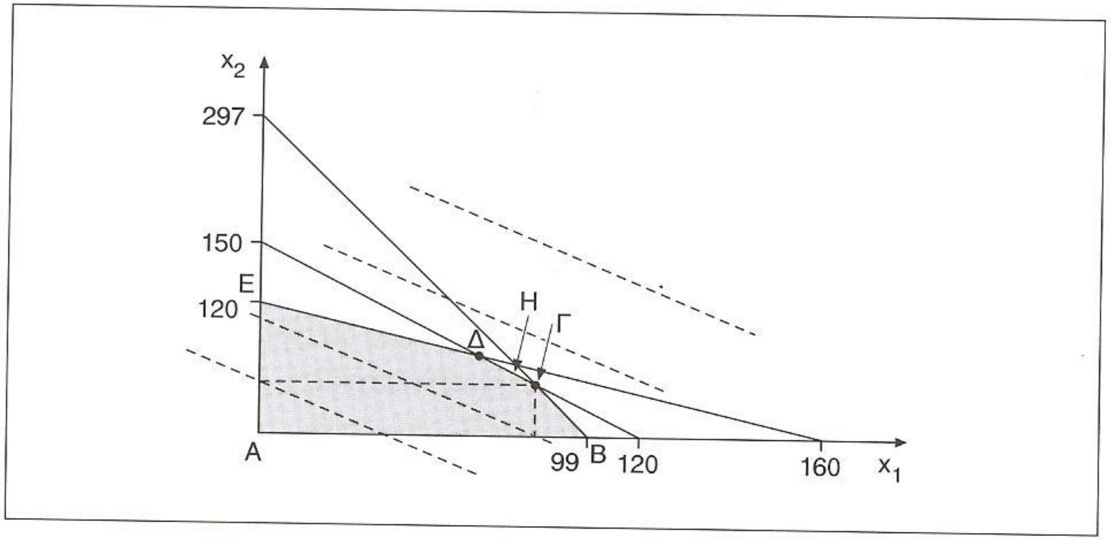
Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

- Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
  - Maximize **$z = 25x_1+20x_2$** (δεκάδες ευρώ)
  - με περιορισμούς
    - $3x_1 + x_2 \leq 297$ (φόδρα)
    - $5x_1 + 4x_2 \leq 600$ (δέρμα)
    - $6x_1 + 8x_2 \leq 960$ (εργασία)
    - $x_1,x_2 \geq 0$ (μη αρνητικότητα)

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

- 1ος περιορισμός
  - $3x_1 + x_2 = 297 \Rightarrow x_2 = -3x_1 + 297$
- 2ος περιορισμός
  - $5x_1 + 4x_2 = 600 \Rightarrow x_2 = -(5/4)x_1 + 150$
- 3ος περιορισμός
  - $6x_1 + 8x_2 = 960 \Rightarrow x_2 = -(3/4)x_1 + 120$
- 4ος περιορισμός
  - $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow$ 1ο τεταρτημόριο

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις



Κορυφή	(x_1, x_2)	z	
A	(0, 0)	0	
B	(99, 0)	2475	
Γ	(84, 45)	3000	Βέλτιστη
Δ	(60, 75)	3000	Βέλτιστη
E	(0, 120)	2400	

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

- Στην περίπτωση αυτή έχουμε **άπειρες** εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις διότι
  - η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι **παράλληλη** με κάποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα σύνορα της περιοχής των εφικτών λύσεων

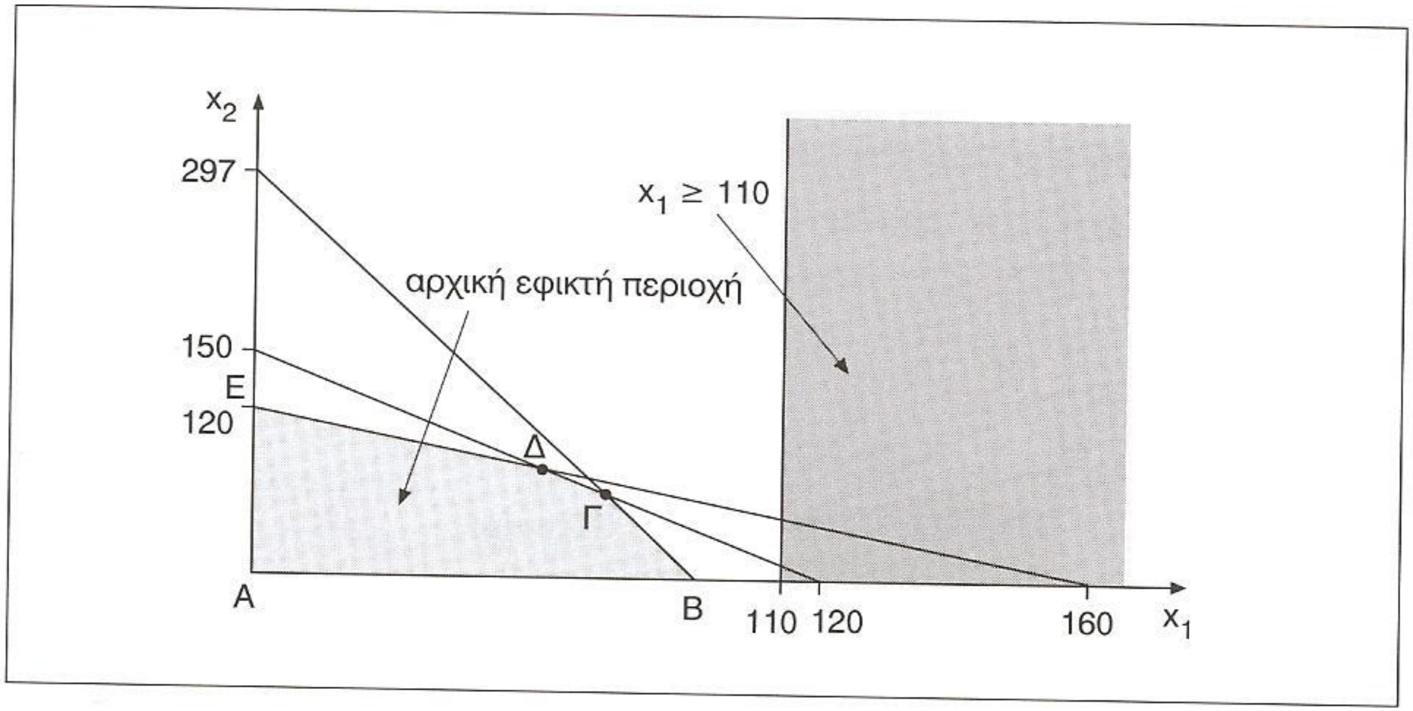
Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

- Στην περίπτωση αυτή η επιλογή μιας βέλτιστης λύσης μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση ενός επιπλέον κριτηρίου επιλογής
- Για παράδειγμα
  - Να παράγονται όσο το δυνατόν περισσότερα γυναικεία ενδύματα (σημείο Γ)
  - Να παράγονται όσο το δυνατόν περισσότερα ανδρικά ενδύματα (σημείο Δ)
  - Να υπάρχει σχεδόν ισόποση παραγωγή ανδρικών και γυναικείων ενδυμάτων (σημείο Η)

Παράδειγμα – Καμία εφικτή λύση

- Έστω ότι η εταιρία έχει παραγγελία για τουλάχιστον 110 μονάδες γυναικείων φορεμάτων
- Νέο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
  - Maximize $\mathbf{z = 25x_1+20x_2}$ (δεκάδες ευρώ)
  - με περιορισμούς
    - $3x_1 + x_2 \leq 297$ (φόδρα)
    - $5x_1 + 4x_2 \leq 600$ (δέρμα)
    - $6x_1 + 8x_2 \leq 960$ (εργασία)
    - $\mathbf{x_1 \geq 110}$ **(παραγγελία)**
    - $x_1,x_2 \geq 0$ (μη αρνητικότητα)

Παράδειγμα – Καμία εφικτή λύση



- Δεν υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς

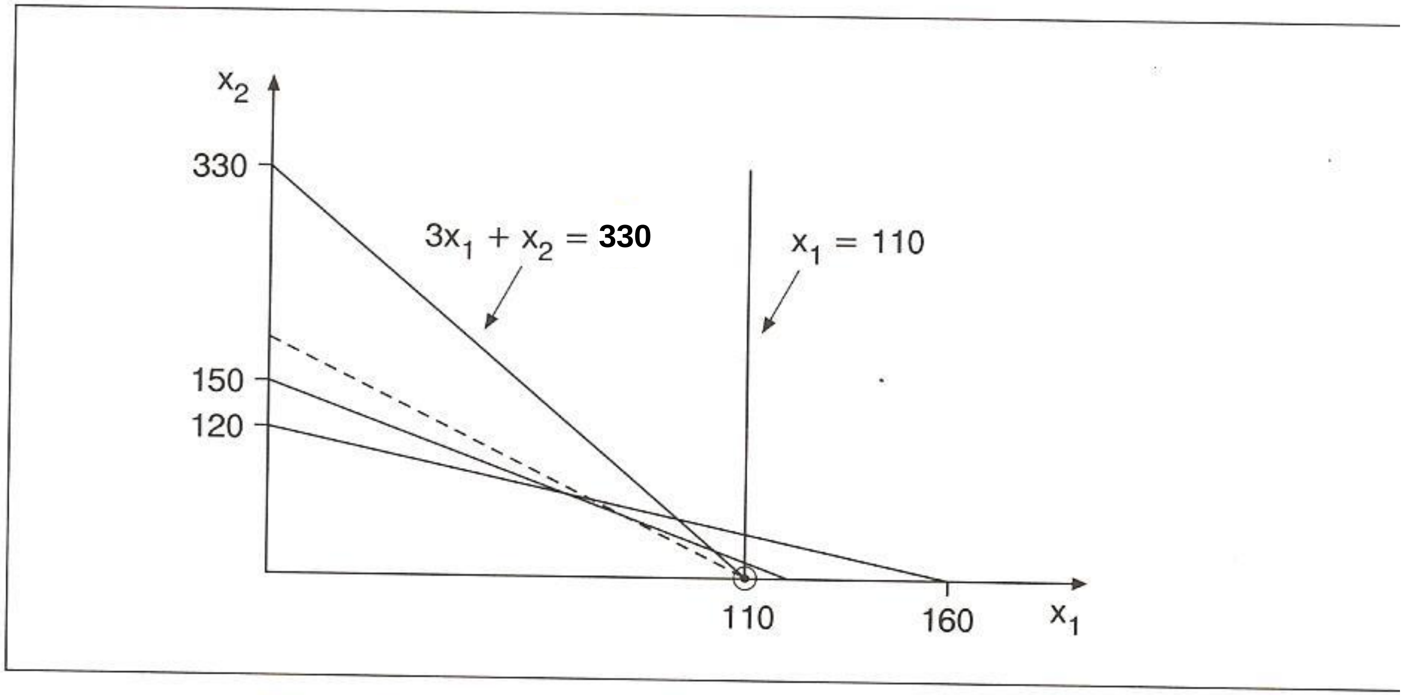
Παράδειγμα – Καμία εφικτή λύση

- Ποιος είναι ο περιορισμός που ουσιαστικά δεν επιτρέπει τη παραγωγή 110 μονάδων γυναικείων φορεμάτων;

Ο περιορισμός για τη φόδρα: $3x_1 + x_2 \leq 297$

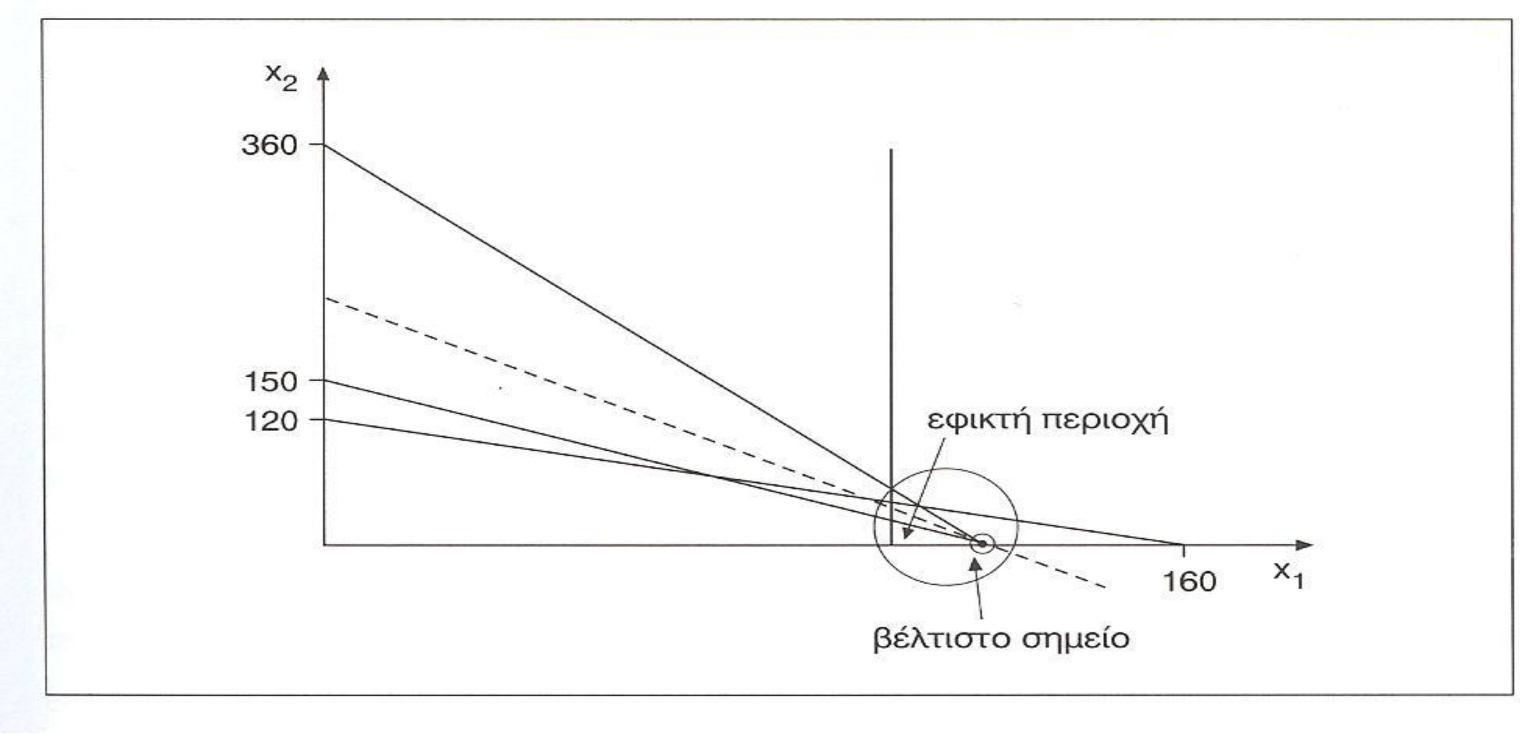
Παράδειγμα – Καμία εφικτή λύση

Ποια είναι η ελάχιστη αύξηση πόρων που οδηγεί σε εφικτή λύση;



Παράδειγμα – Καμία εφικτή λύση

- Ποια θα είναι η εφικτή περιοχή αν η φόδρα αυξηθεί σε 360 μέτρα;



Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Έστω μία εταιρία κατασκευής τηλεκατευθυνόμενων αερόστατων η οποία χρησιμοποιεί ενισχυμένο νάιλον για την παραγωγή των προϊόντων της
- Η εταιρία παράγει τηλεκατευθυνόμενα αερόστατα σε δύο μεγέθη
  - Μεγάλο
  - Μικρό

Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Το μοναδιαίο περιθώριο κέρδους είναι 600 € για το μεγάλο αερόστατο και 400 € για το μικρό
- Η εταιρία έχει ήδη παραγγελία για 30 μεγάλα αερόστατα
- Κάθε μικρό αερόστατο απαιτεί 2 μέτρα ενισχυμένου νάιλον
- Η συνολική διαθέσιμη ποσότητα του νάιλον είναι 280 μέτρα

Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Σκοπός
  - Να προσδιοριστεί πόσα αερόστατα θα πρέπει η εταιρία να παράγει από κάθε μέγεθος, ώστε να μεγιστοποιήσει το συνολικό περιθώριο κέρδους της

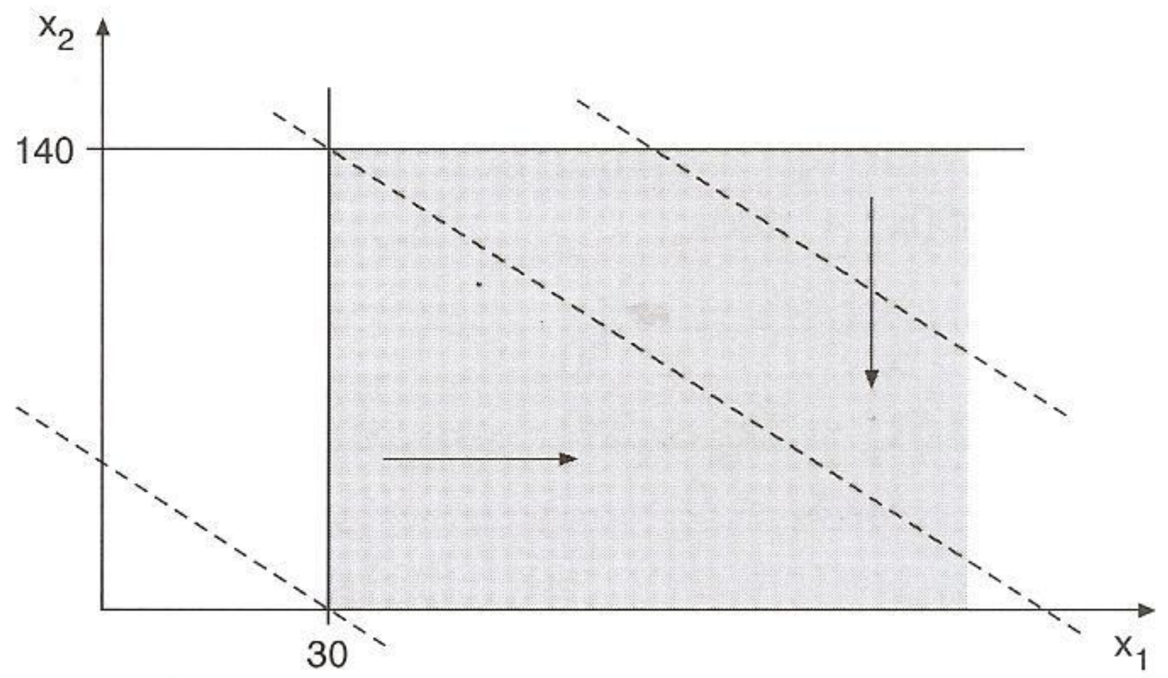
Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_1: αριθμός αερόστατων μεγάλου μεγέθους
  - x_2: αριθμός αερόστατων μικρού μεγέθους
- Αντικειμενική συνάρτηση
  - Maximize $\mathbf{z = 600x_1 + 400x_2}$

Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
  - Maximize $\mathbf{z = 600x_1 + 400x_2}$
  - Με περιορισμούς:
    - $x_1 \geq 30$ (μεγάλα αερόστατα)
    - $2x_2 \leq 280$ (νάιλον)
    - $x_1, x_2 \geq 0$ (μη αρνητικότητα)

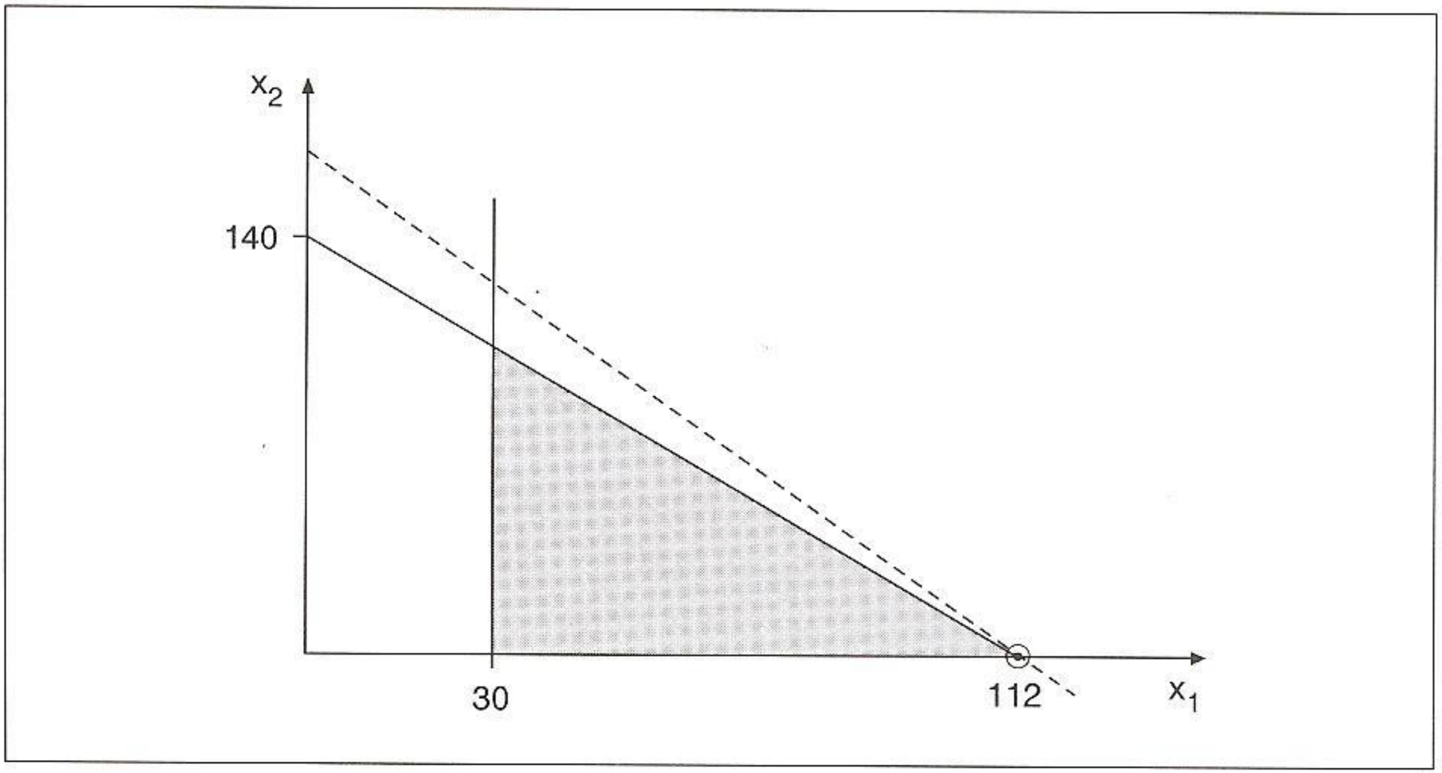
Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα



Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα

- Αν υποθέσουμε ότι κάθε μεγάλο αερόστατο απαιτεί 2.5 μέτρα νάιλον πως τροποποιείται το μοντέλο;
  - Maximize $\mathbf{z = 600x_1 + 400x_2}$
  - Με περιορισμούς:
    - $x_1 \geq 30$ (μεγάλα αερόστατα)
    - $\mathbf{2.5x_1 + 2x_2 \leq 280}$ **(νάιλον)**
    - $x_1, x_2 \geq 0$ (μη αρνητικότητα)

Παράδειγμα – Μη φραγμένο πρόβλημα



Ανάλυση ευαισθησίας

- Μελέτη των συνεπειών που προκύπτουν στη βέλτιστη λύση από αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων ενός μοντέλου
- Εύρεση σεναρίων και ερωτημάτων της μορφής
  - Τι θα συμβεί αν υπάρξει μια μεταβολή σε κάποιο στοιχείο του προβλήματος;

Ανάλυση ευαισθησίας

- Παραδείγματα ερωτημάτων (σχετικά με μεταβολή των αντικειμενικών συντελεστών)
  1. Πώς θα επηρεαστεί το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής και το συνολικό κέρδος, αν μειωθεί η τιμή πώλησης ενός προϊόντος κατά ένα ποσοστό;
  2. Μήπως πρέπει να αλλάξουμε το συνδυασμό προϊόντων που παράγουμε λόγω της μεταβολής στην τιμή αυτή;
  3. Μέσα σε ποια όρια μπορεί να «κινείται» η τιμή πώλησης ενός προϊόντος χωρίς να είναι απαραίτητο να αλλάξουμε το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής;

  - Συνοπτικά
    - **Σε ποιο βαθμό επηρεάζει μια μεταβολή ενός αντικειμενικού συντελεστή τη βέλτιστη λύση και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης;**

Ανάλυση ευαισθησίας

- Παραδείγματα ερωτημάτων (σχετικά με τη μεταβολή των δεξιών μελών των περιορισμών)
  1. Υπάρχουν κάποια όρια μέσα στα οποία μπορεί να μεταβάλλεται η διαθέσιμη ποσότητα ενός πόρου χωρίς να επηρεάζονται κάποια από τα στοιχεία της βέλτιστης λύσης που έχει βρεθεί και ποια είναι αυτά;
  2. Ποια είναι η οριακή αξία ενός πόρου;
  - Συνοπτικά
    - **Σε ποιο βαθμό επηρεάζει τη βέλτιστη λύση και την άριστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πιθανή μεταβολή σε κάποια από τις σταθερές δεξιού μέλους ενός περιορισμού;**

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- **Μεταβολή στην τιμή του αντικειμενικού συντελεστή** μιας μεταβλητής απόφασης
- **Εύρος ευαισθησίας / αριστότητας**
  - Το διάστημα μέσα στο οποίο μπορεί να μεταβάλλεται η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή χωρίς να αλλάζει η βέλτιστη λύση

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

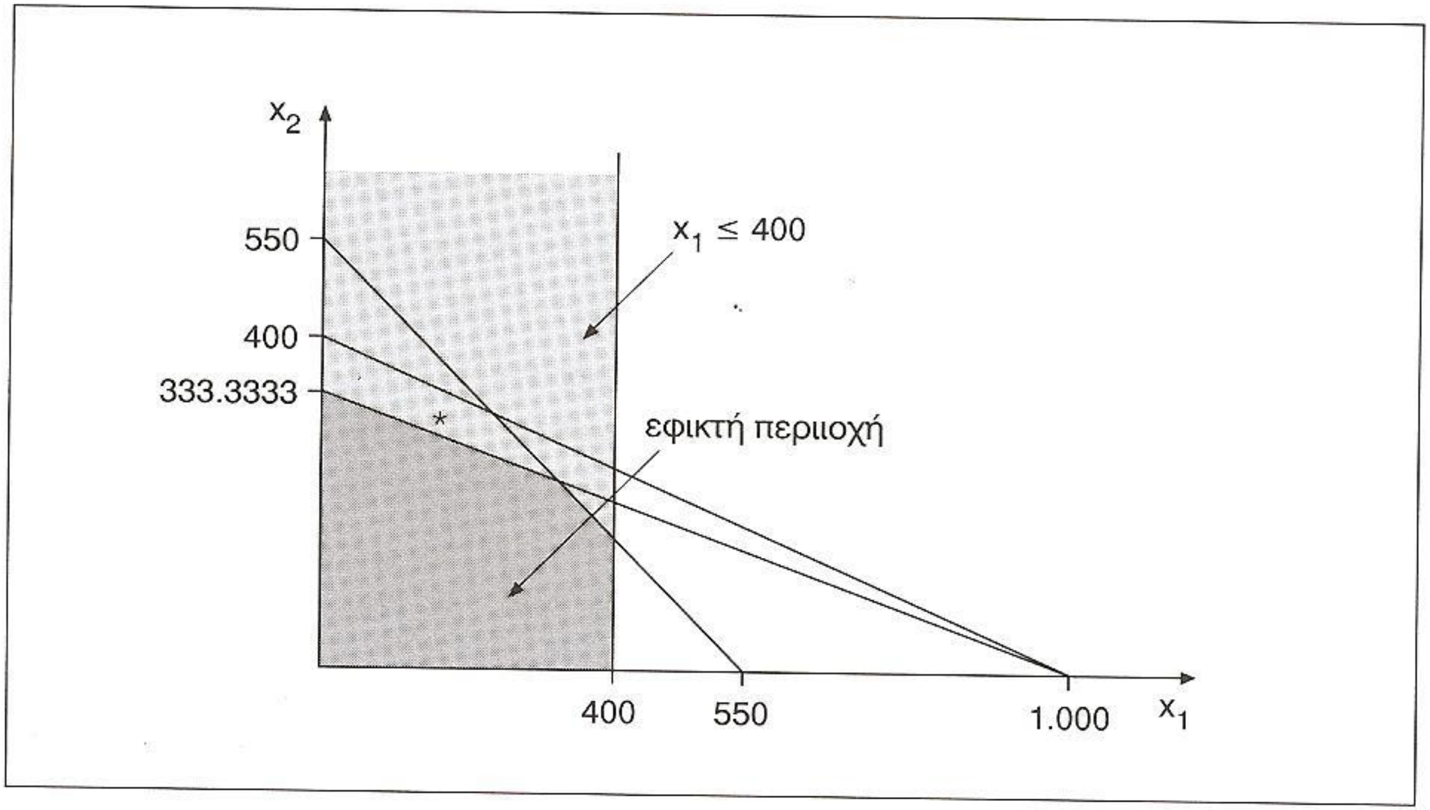
- Πρόβλημα
  - Βιομηχανική επιχείρηση γαλακτοκομικών προϊόντων
- Συνολικό μοντέλο
  - **Maximize $z = 150x_1 + 200x_2$**

(αντικειμενική συνάρτηση)

με περιορισμούς:

- $x_1 + x_2 \leq 550$ (γάλα σε λίτρα)
- $x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (λεπτά εργασίας)
- $2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (λεπτά παστερίωσης και ψύξης)
- $x_1 \leq 400$ (ζήτηση Προϊόντος 1)
- $x_1, x_2 \geq 0$ (μη αρνητικές τιμές)

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές



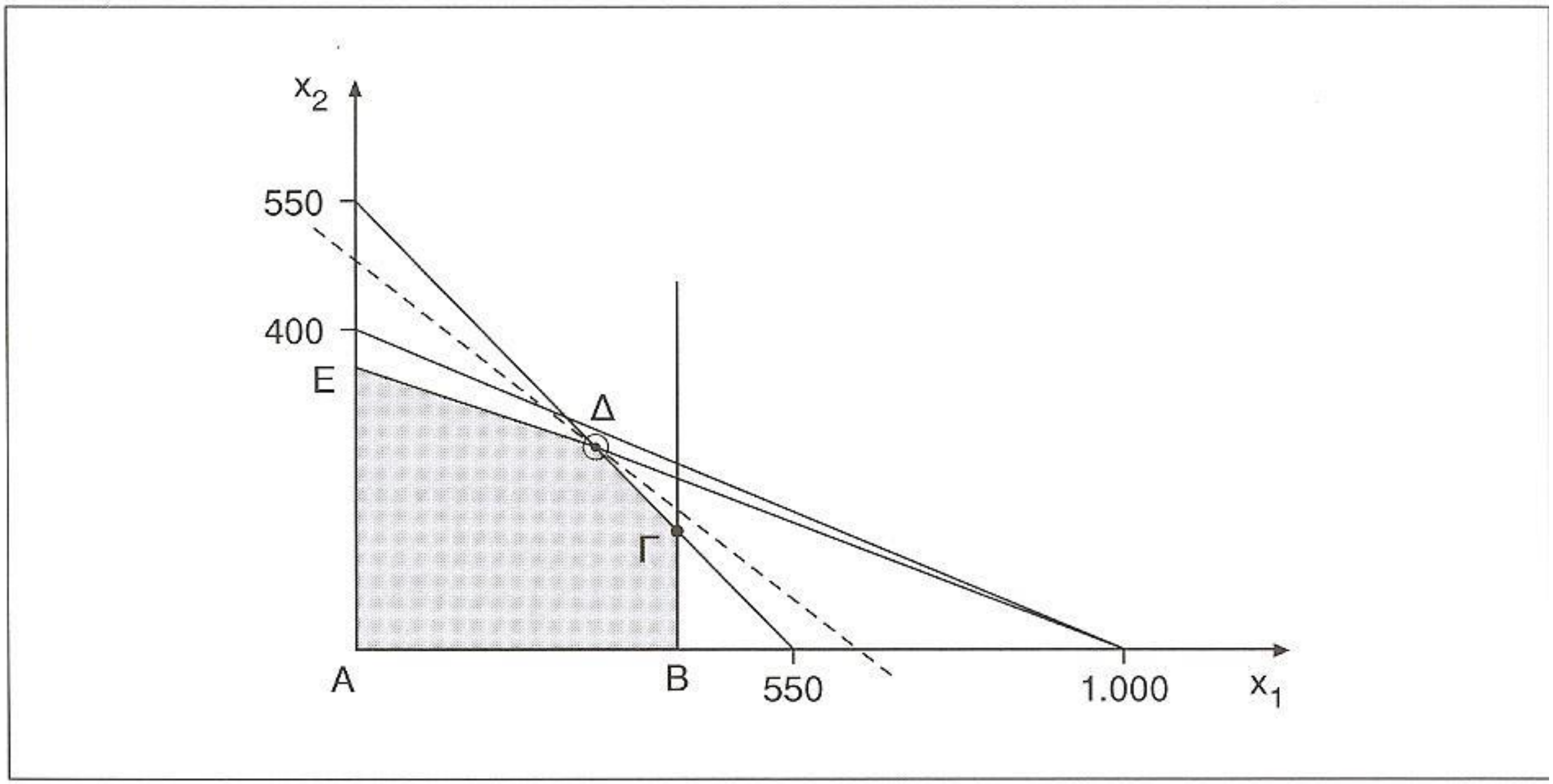
Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Υπόθεση
  - Έστω ότι για τις τιμές των αντικειμενικών συντελεστών υπάρχει περιθώριο λάθους εκτίμησης 10%
  - Το κέρδος για το Προϊόν 1 κυμαίνεται μεταξύ 135 και 165 λεπτών του €
  - Το κέρδος για το Προϊόν 2 κυμαίνεται μεταξύ 180 και 220 λεπτών του €

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

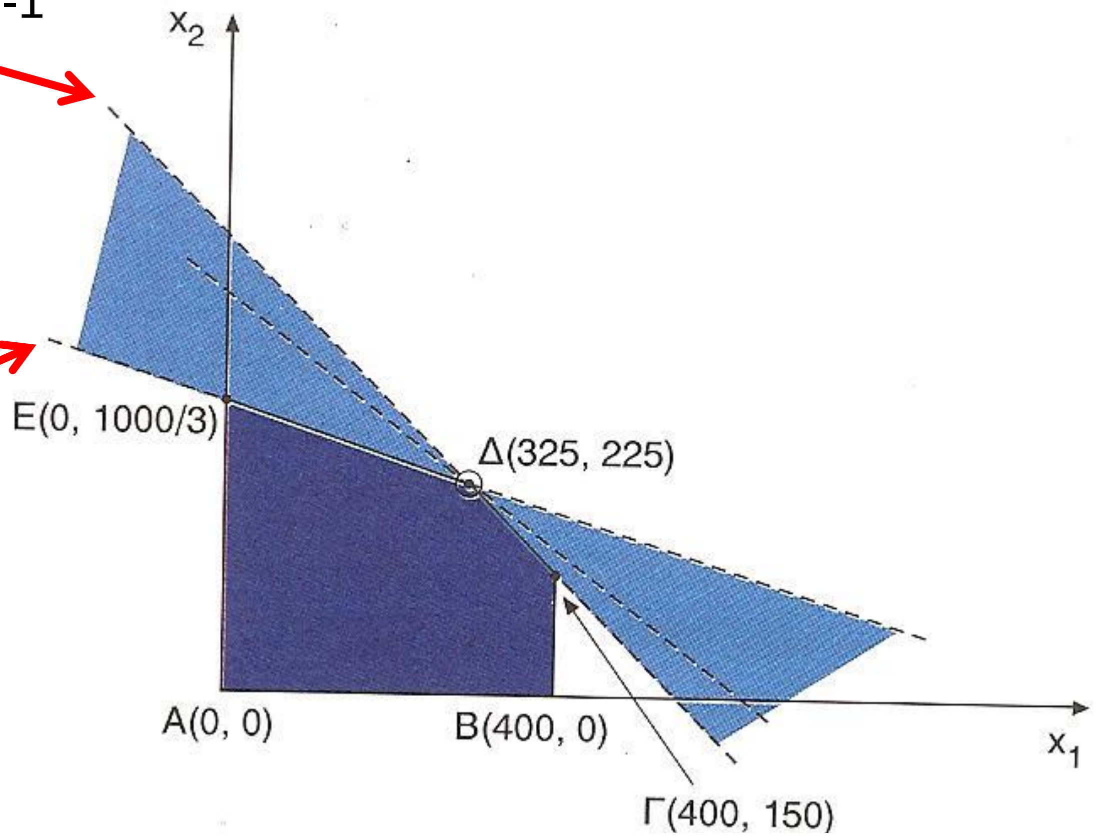
- Διερεύνηση
  - Η αντικειμενική συνάρτηση έχει εξίσωση $x_2 = -(3/4)x_1 + (1/200)z$, δηλαδή η κλίση της είναι **–(3/4)**
  - Η κλίση του περιορισμού $x_1 + 3x_2 \leq 1000$ είναι **–(1/3)**
  - Η κλίση του περιορισμού $x_1 + x_2 = 550$ είναι **–1**

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές



Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

Κλίση -1



Κλίση =-1/3

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι άλλες παράμετροι παραμένουν σταθερές θα προσπαθήσουμε να βρούμε το διάστημα τιμών του αντικειμενικού συντελεστή της μεταβλητής απόφασης x_1 για το οποίο η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι
  - $x_2 = -(c_1/200)x_1 + (1/200)z$
- Επομένως πρέπει να ισχύει
  - $-1 \leq -(c_1/200) \leq -(1/3) \Rightarrow$
  - $200/3 \leq c_1 \leq 200$

  - $c_1 = 200$ ταύτιση με τον 1^o περιορισμό
  - $c_1 = 200/3$ ταύτιση με το 2^o περιορισμό

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι άλλες παράμετροι παραμένουν σταθερές θα προσπαθήσουμε να βρούμε το διάστημα τιμών του αντικειμενικού συντελεστή της μεταβλητής απόφασης x_2 για το οποίο η βέλτιστη λύση δεν μεταβάλλεται

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

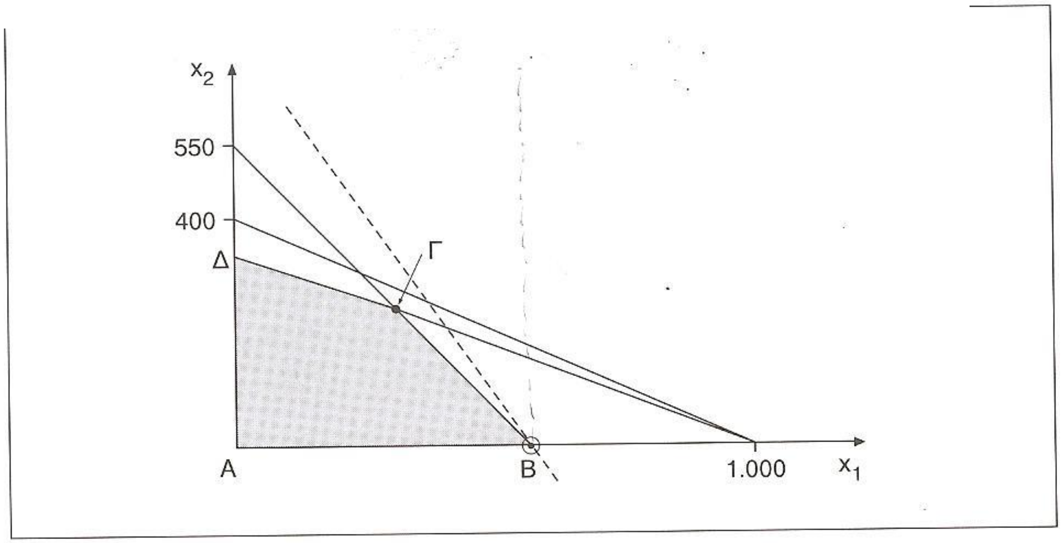
- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι
  - $x_2 = -(150/c_2)x_1 + (1/c_2)z$
- Επομένως πρέπει να ισχύει
  - $-1 \leq -(150/c_2) \leq -(1/3) \Rightarrow$
  - $150 \leq c_2 \leq 450$

  - $c_2 = 150$ ταύτιση με τον 1^o περιορισμό
  - $c_2 = 450$ ταύτιση με το 2^o περιορισμό

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Έστω το παρακάτω **τροποποιημένο μοντέλο** (αλλαγμένη αντικειμενική συνάρτηση, χωρίς τον 4ο περιορισμό)
  - Maximize z = $\mathbf{200}x_1 + \mathbf{150}x_2$
  - με περιορισμούς:
    - $x_1 + x_2 \leq 550$
    - $x_1 + 3x_2 \leq 1000$
    - $2x_1 + 5x_2 \leq 2000$

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές



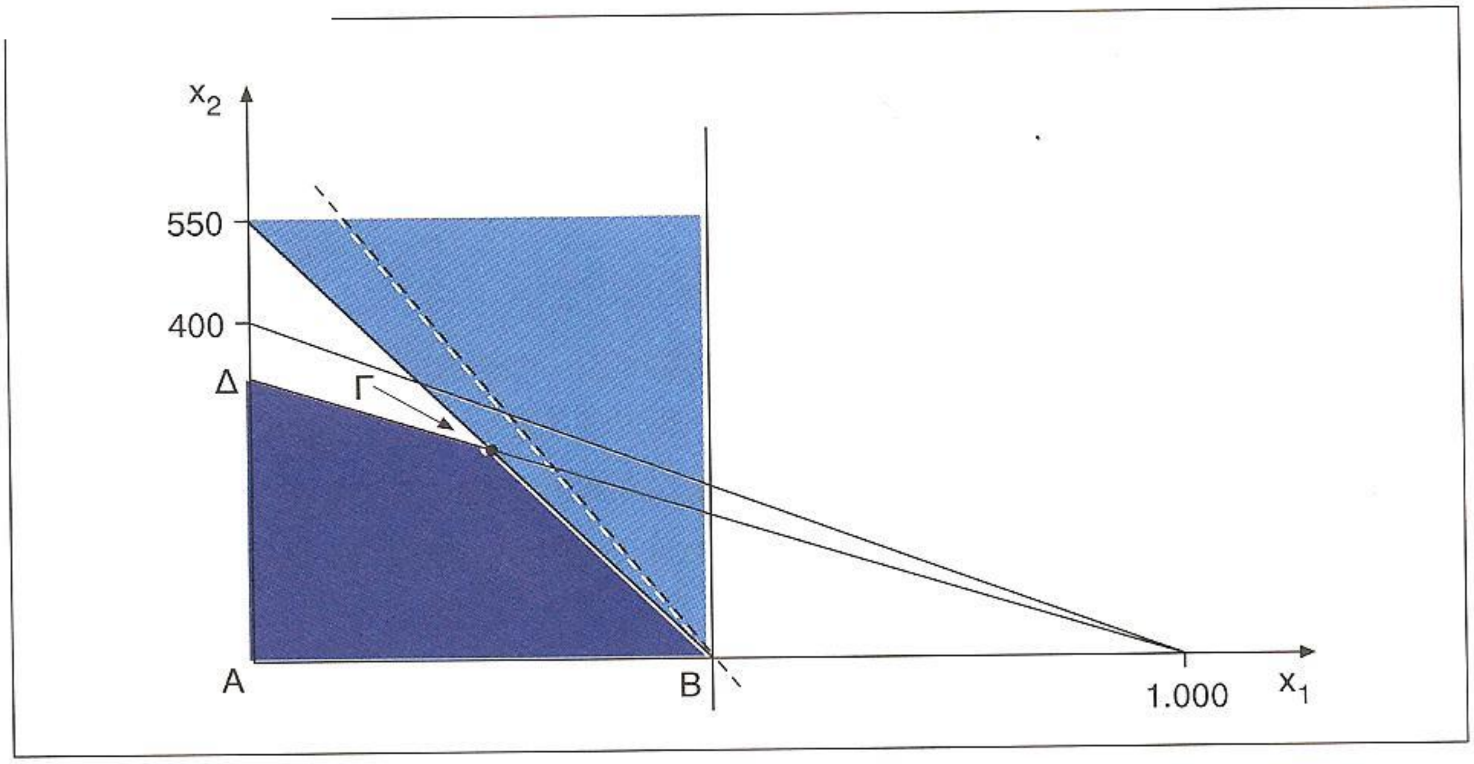
Κορυφή	(x1, x2)	z	
A	(0, 0)	0	
B	(550, 0)	110000	Βέλτιστη
Γ	(325, 325)	98750	
Δ	(0, 666.667)	50000	

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Ας διερευνήσουμε το εύρος ευαισθησίας του αντικειμενικού συντελεστή της μεταβλητής απόφασης x_1
- Η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $-(c_1/150)$
- Σε ποιο διάστημα μπορεί να «κινηθεί» χωρίς να αλλάξει το βέλτιστο σημείο;

$$150 \leq c_1 < \infty$$

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές



Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Ερμηνεία αποτελέσματος
  - Η βέλτιστη λύση προτείνει να παράγεται μόνο το Προϊόν 1 που συνεισφέρει 200 λεπτά
  - Αν αυτό το κέρδος αυξάνεται προφανώς δε θα αλλάξει η επιχείρηση την απόφασή της
  - Αντιθέτως, αν το κέρδος του Προϊόντος 1 αρχίσει και μειώνεται, το κομβικό σημείο είναι η τιμή 150
  - Μόλις πέσει κάτω από 150 δε συμφέρει να παράγεται μόνο το Προϊόν 1

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Επιστροφή στο αρχικό παράδειγμα
  - Η αντικειμενική συνάρτηση έχει εξίσωση $x_2 = -(3/4)x_1 + (1/200)z$, δηλαδή η κλίση της είναι **–(3/4)**
  - Η κλίση του περιορισμού $x_1 + 3x_2 \leq 1000$ είναι **–(1/3)**
  - Η κλίση του περιορισμού $x_1 + x_2 = 550$ είναι **–1**

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Αντικειμενικοί συντελεστές

- Τι γίνεται όταν οι δύο αντικειμενικοί συντελεστές μπορούν να μεταβάλλονται ταυτόχρονα;
  - $-1 \leq -(c_1/c_2) \leq -(1/3)$

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Δεξιά μέλη περιορισμών

- Μελέτη των αλλαγών που προκαλούν στην εφικτή περιοχή, στη βέλτιστη λύση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πιθανές μεταβολές στα **δεξιά μέλη** των περιορισμών
- **Εύρος εφικτότητας**
  - Είναι το εύρος ευαισθησίας για μια παράμετρο δεξιού μέλους

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση

- Έστω το πρόβλημα της γαλακτοκομικής εταιρίας
- Χρησιμοποιούμε την τυποποιημένη μορφή του προβλήματος (έξι μεταβλητές, τέσσερις εξισώσεις/περιορισμοί)
  - **Maximize $z = 150x_1 + 200x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$**

  με περιορισμούς:
    - $x_1 + x_2 + 1s_1 = 550$
    - $x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$
    - $2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$
    - $x_1 + 1s_4 = 400$
    - $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση

- Στο γραμμικό προγραμματισμό όταν έχουμε **n** + **m** συνολικά μεταβλητές (**n** απόφασης και **m** βοηθητικές) και **m** λειτουργικούς περιορισμούς
  1. Δίνουμε μηδενικές τιμές σε **n** μεταβλητές (οι οποίες ονομάζονται **μη βασικές μεταβλητές**)
  2. Επιλύουμε ως προς τις υπόλοιπες **m** μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται **βασικές μεταβλητές** και μπορούν να πάρουν μη μηδενικές τιμές

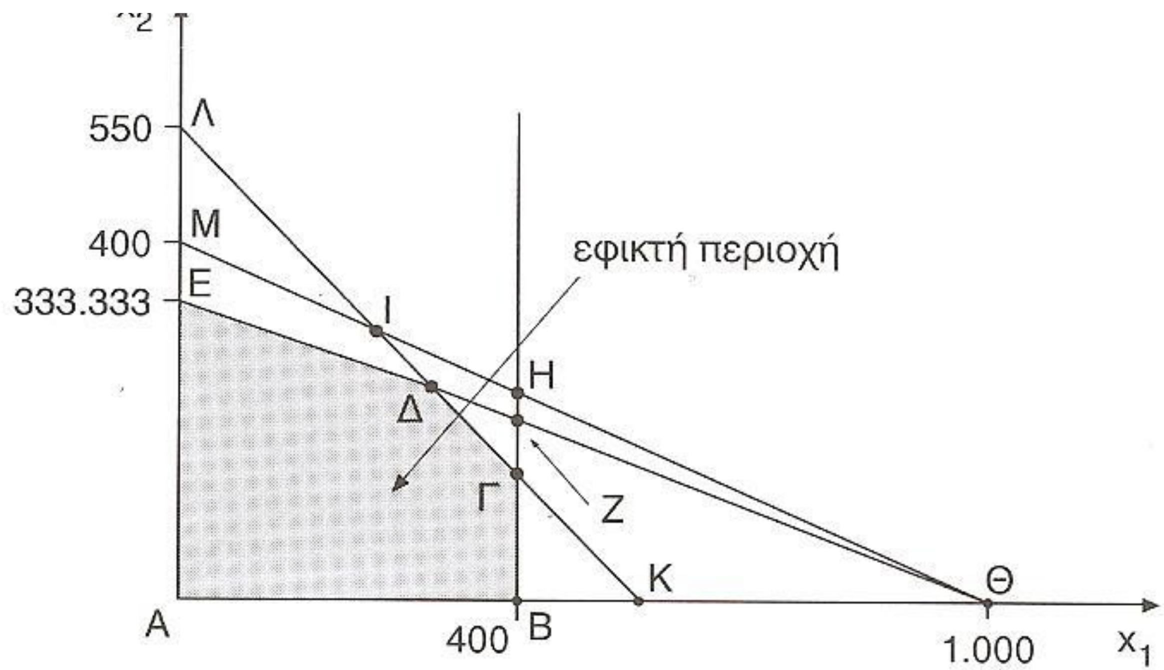
Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση

- **Βασική λύση**
  - Μια λύση που προκύπτει με **n** μηδενικές μεταβλητές και **m** μη μηδενικές μεταβλητές και σχετίζεται με όλες τις μεταβλητές του προβλήματος (απόφασης και βοηθητικές)
- **Βασική εφικτή λύση**
  - Βασική λύση που ανήκει στην εφικτή περιοχή
- **Εκφυλισμένη λύση**
  - Βασική εφικτή λύση που έχει μια μεταβλητή απόφασης με μηδενική τιμή

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση

- **Βασικές εφικτές λύσεις**
  - Προκύπτουν από τα ακραία σημεία (κορυφές) της εφικτής περιοχής
- **Βασικές μη εφικτές λύσεις**
  - Προκύπτουν από τα ακραία σημεία εκτός της εφικτής περιοχής
  - Είναι σημεία τομής περιορισμών αλλά όχι κορυφές της εφικτής περιοχής

Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση



Ανάλυση ευαισθησίας – Γραφική επίλυση – Βασική λύση

Ακραίο σημείο	Βασική λύση						Παρατηρήσεις
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
Α	0	0	550	1000	2000	400	Εφικτή εκφυλισμένη
Β	400	0	150	600	1200	0	Εφικτή εκφυλισμένη
Γ	400	150	0	150	450	.0	Εφικτή
Δ	325	225	0	0	225	75	Εφικτή, Βέλτιστη
Ε	0	1000/3	650/3	0	1000/3	400	Εφικτή εκφυλισμένη
Ζ	400	200	-50	0	200	0	Μη εφικτή
Η	400	240	-90	-120	0	0	Μη εφικτή
Θ	1000	0	-450	0	0	-600	Μη εφικτή, εκφυλισμένη
Ι	250	300	0	-150	0	150	Μη εφικτή
Κ	550	0	0	450	900	-150	Μη εφικτή εκφυλισμένη
Λ	0	550	0	-650	-750	400	Μη εφικτή εκφυλισμένη
Μ	0	400	150	-200	0	400	Μη εφικτή εκφυλισμένη