Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 2: Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό (2ο μέρος)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό (2ο μέρος)

Υποενότητα 1

Σκοποί 1ης υποενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τη μορφή ενός προβλήματος ΓΠ με ελαχιστοποίηση
- Να μάθουν οι φοιτητές πως μπορούν να επιλύουν γραφικά ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και να αναγνωρίζουν τους δεσμευτικούς και τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς
- Να μπορούν οι φοιτητές να αντιμετωπίζουν τις διάφορες παραλλαγές και εναλλακτικές περιπτώσεις προβλημάτων ΓΠ και πιο συγκεκριμένα την περίπτωση άπειρων εναλλακτικών βέλτιστων λύσεων

Περιεχόμενα 1ης υποενότητας

- Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης
- Γραφική επίλυση
- Δεσμευτικοί και μη δεσμευτικοί περιορισμοί
- Παραλλαγές
- Ειδικές περιπτώσεις
- Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (1/10)

- Μια κατασκευαστική εταιρία κατασκευάζει εξοχικές κατοικίες κοντά σε γνωστά θέρετρα της Εύβοιας
- Η εταιρία προγραμματίζει τη διαφημιστική της εκστρατεία για την προώθηση των πωλήσεων των εξοχικών της η οποία θα ξεκινήσει τον Ιούνιο και θα διαρκέσει μέχρι το τέλος του Αυγούστου

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (2/10)

- Η διαφήμιση θα γίνει στην τηλεόραση και ειδικότερα σε δύο διαφημιστικές ζώνες, την πρωινή και τη βραδινή
- Το κόστος μιας προβολής στην πρωινή ζώνη είναι 150.000 €, ενώ στη βραδινή ζώνη είναι 250.000 €
- Δημοσκοπήσεις έχουν δείξει ότι την πρωινή ζώνη στην περιοχή της Αττικής την παρακολουθούν κατά μέσο όρο 30.000 γυναίκες και 5.000 άνδρες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (3/10)

- Από την άλλη, τη βραδινή ζώνη την παρακολουθούν κατά μέσο όρο 20.000 γυναίκες και 25.000 άνδρες
- Η εταιρία αποσκοπεί να παρακολουθήσουν τη διαφήμιση κατά την περίοδο προγραμματισμού τουλάχιστον 1.500.000 γυναίκες και 900.000 άνδρες, επιδιώκοντας επαναλήψεις τηλεθέασης της διαφήμισης από τα ίδια άτομα
- Επίσης, πιστεύει ότι θα πρέπει να γίνουν τουλάχιστον 20 προβολές στη βραδινή ζώνη

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (4/10)

- **Ερώτημα**
  - Πόσες προβολές πρέπει να γίνουν σε κάθε ζώνη, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος, αλλά να ικανοποιούνται συγχρόνως οι απαιτήσεις τηλεθέασης καθώς και ο ελάχιστος αριθμός προβολών στη βραδινή ζώνη;

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (5/10)

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1: αριθμός προβολών στην πρωινή ζώνη
  - x_2: αριθμός προβολών στη βραδινή ζώνη

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (6/10)

- **Αντικειμενική συνάρτηση**
  - Συνολικό κόστος προβολών =

    κόστος προβολών στην πρωινή ζώνη + κόστος προβολών στη βραδινή ζώνη =

    (κόστος πρωινής προβολής · αριθμός πρωινών εκπομπών) + (κόστος βραδινής προβολής · αριθμός βραδινών εκπομπών) =

    $150.000 \cdot x_1 + 250.000 \cdot x_2$
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2$**

    όπου κάθε μεταβλητή έχει μονάδα μέτρησης τα 100.000 €

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (7/10)

- **Περιορισμοί προβλήματος – 1ος περιορισμός**
  - σύνολο γυναικών που θα δουν πρωινές προβολές + σύνολο γυναικών που θα δουν βραδινές προβολές ≥ ελάχιστος αριθμός γυναικών που θα δουν τη διαφήμιση
  - $30.000x_1 + 20.000x_2 \geq 1.500.000$
  - $\mathbf{0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 15}$

  όπου η μονάδα μέτρησης είναι οι εκατοντάδες χιλιάδες γυναίκες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (8/10)

- **Περιοριστικοί προβλήματος – 2ος περιορισμός**
  - σύνολο ανδρών που θα δουν πρωινές προβολές + σύνολο ανδρών που θα δουν βραδινές προβολές ≥ ελάχιστος αριθμός ανδρών που θα δουν τη διαφήμιση
  - $5.000x_1 + 25.000x_2 \geq 900.000$
  - $\mathbf{0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 \geq 9}$

  όπου η μονάδα μέτρησης είναι οι εκατοντάδες χιλιάδες άνδρες

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (9/10)

- **Περιορισμοί προβλήματος – 3ος περιορισμός**
  - ο ελάχιστος αριθμός προβολών που θα πρέπει να γίνουν στη βραδινή ζώνη είναι 20
  - $\mathbf{x_2 \geq 20}$

- **Περιορισμοί προβλήματος – 4ος περιορισμός**
  - και οι δύο μεταβλητές απόφασης παίρνουν τιμές μη αρνητικές
  - $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Παράδειγμα προβλήματος ελαχιστοποίησης (10/10)

- Συνολικό μοντέλο
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2$**

  με περιορισμούς:

    - **$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 15$**
    - **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 \geq 9$**
    - **$x_2 \geq 20$**
    - **$x_1, x_2 \geq 0$**

Γραφική επίλυση του μοντέλου (1/6)

- **$x_1 \geq 0$**
- **$x_2 \geq 0$**

- Άρα βρισκόμαστε στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο

Γραφική επίλυση του μοντέλου (2/6)

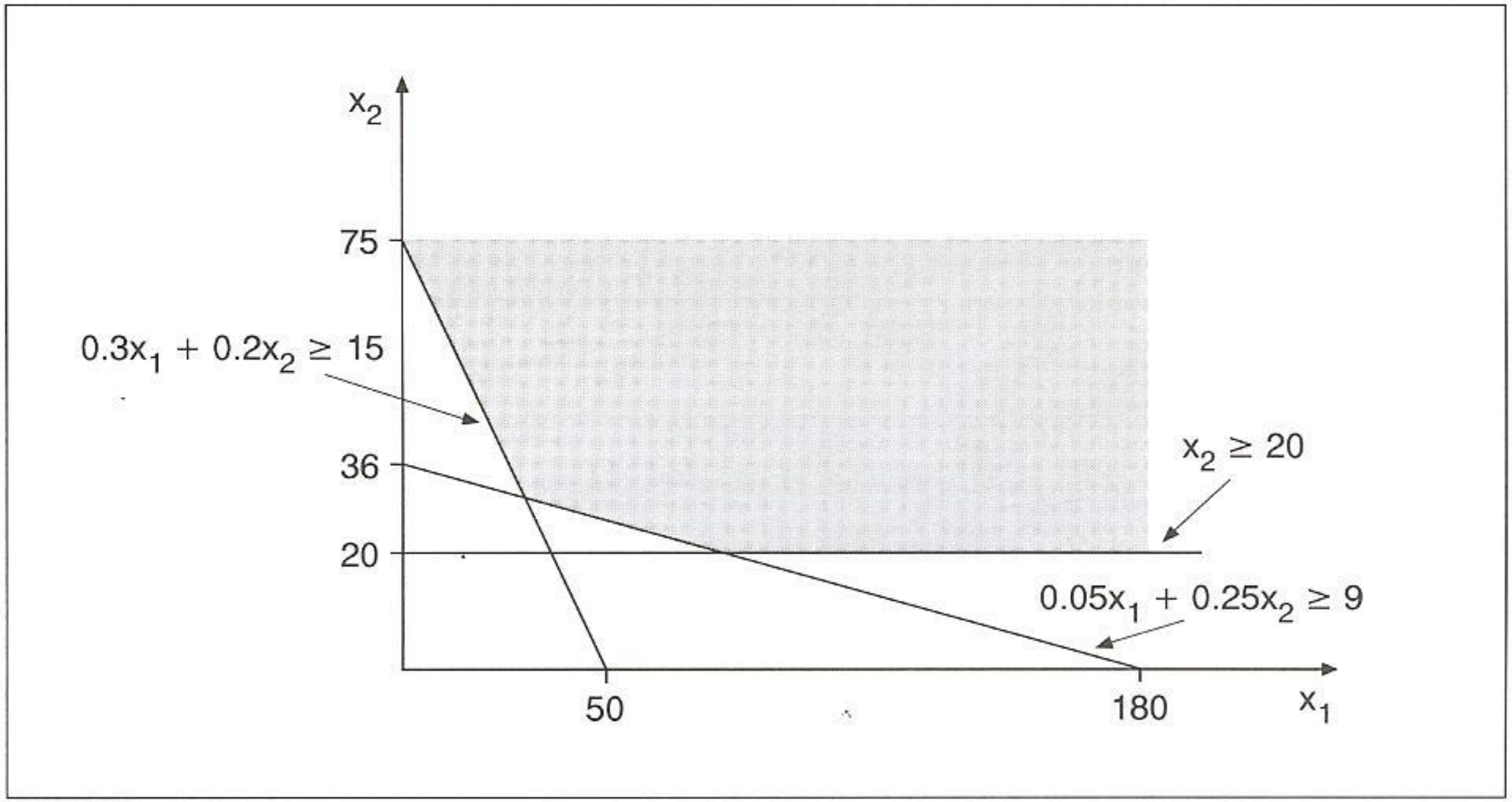
- $\mathbf{0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = -1{,}5x_1 + 75}$
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο **(50,0)** και τον άξονα y στο σημείο **(0,75)**
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $\mathbf{0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 15}$

Γραφική επίλυση του μοντέλου (3/6)

- **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = -0{,}2x_1 + 36$**
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο **(180,0)** και τον άξονα y στο σημείο **(0,36)**
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - **$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 15$**
  - **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 \geq 9$**

Γραφική επίλυση του μοντέλου (4/6)

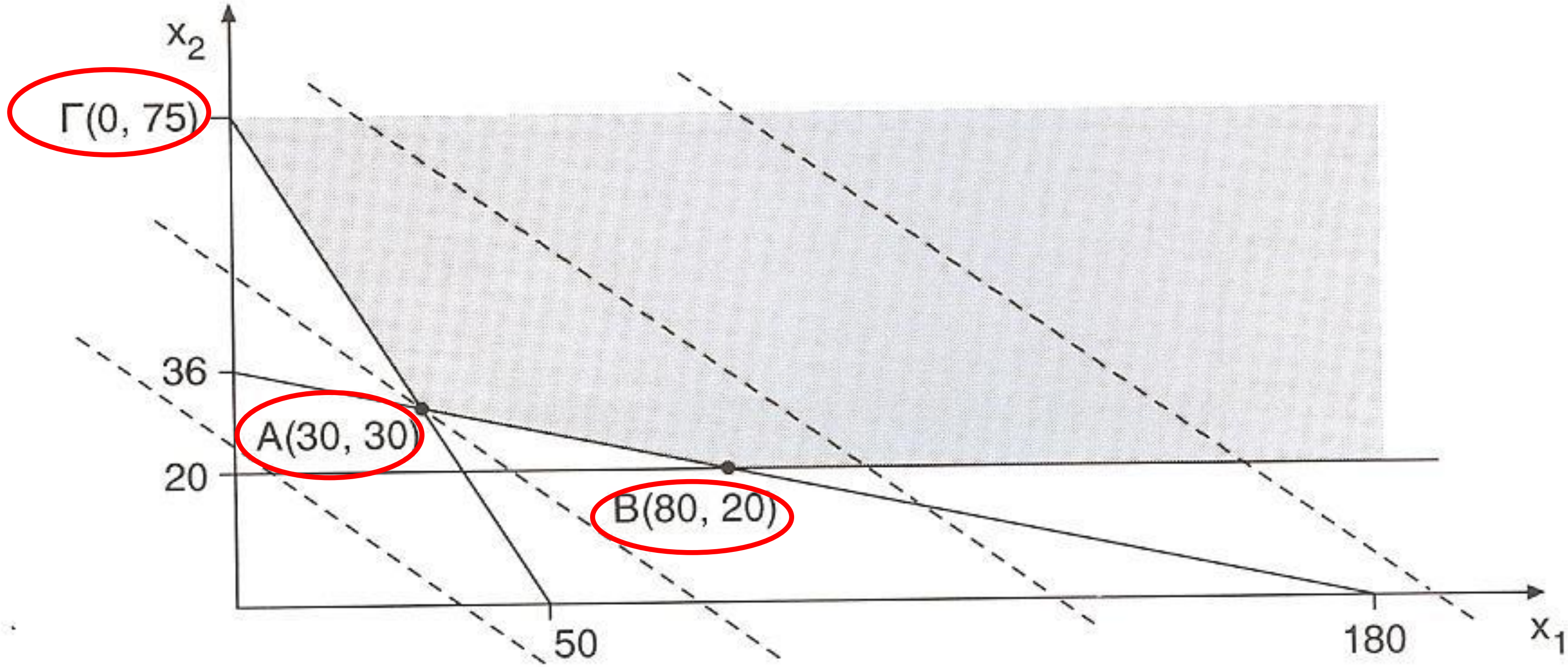
- $x_2 = 20$
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα y στο σημείο **(0,20)** και είναι παράλληλη με τον άξονα x
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $\mathbf{0,3x_1 + 0,2x_2 \geq 15}$
  - $\mathbf{0,05x_1 + 0,25x_2 \geq 9}$
  - $\mathbf{x_2 \geq 20}$



x2
75
36
20
0.3x1 + 0.2x2 ≥ 15
x2 ≥ 20
0.05x1 + 0.25x2 ≥ 9
50
180
x1

Γραφική επίλυση του μοντέλου (5/6)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής
  - **Α(30,30)**
  - **Β(80,20)**
  - **Γ(0,75)**



x2
Γ(0, 75)
36
A(30, 30)
20
B(80, 20)
50
180
x1

Γραφική επίλυση του μοντέλου (6/6)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**(x_1, x_2)**	**z**	**Είδος λύσης**
Α	(30, 30)	120	Βέλτιστη
Β	(80, 20)	170	
Γ	(0, 75)	187,5	
Δ	(180, 20)	320	

Δεσμευτικοί και μη δεσμευτικοί περιορισμοί (1/3)

- **Μεταβλητή Πλεονασμού**
  - Η ποσότητα κατά την οποία υπερβαίνει το αριστερό μέλος του περιορισμού τη σταθερά του δεξιού μέλους σε ένα περιορισμό με φορά “≥” (μεγαλύτερο)
  - Έχει μηδενική τιμή για τους δεσμευτικούς πλεονασμούς με φορά “≥” και θετικές τιμές για τους μη δεσμευτικούς

Δεσμευτικοί και μη δεσμευτικοί περιορισμοί (2/3)

- Σε κάθε περιορισμό i αντιστοιχεί μια χαλαρή μεταβλητή πλεονασμού e_i, $i = 1, \ldots, N$, όπου N το πλήθος των περιορισμών
- Η προσθήκη των μεταβλητών πλεονασμού οδηγεί στην **τυποποιημένη μορφή** του προβλήματος, όπου όλοι οι περιορισμοί του έχουν μετατραπεί σε ισότητες και τα δεξιά μέλη είναι μη αρνητικά

Δεσμευτικοί και μη δεσμευτικοί περιορισμοί (3/3)

- Τυποποιημένη μορφή
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$**

  με περιορισμούς:

    - **$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 1e_1 = 15$**
    - **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 - 1e_2 = 9$**
    - **$x_2 - 1e_3 = 20$**
    - **$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0$**

Παραλλαγή (1/5)

- Έστω ότι στη βραδινή ζώνη υπάρχει η δυνατότητα καταχώρησης 40 το πολύ προβολών λόγω χρονικού περιορισμού
- Ο 3ος περιορισμός παίρνει τη μορφή
  - $x_2 \leq 40$

Παραλλαγή (2/5)

- Η ευθεία τέμνει τον άξονα y στο σημείο **(0,40)** και είναι παράλληλη προς τον άξονα x
- Η εφικτή περιοχή είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $\mathbf{0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 15}$
  - $\mathbf{0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 \geq 9}$
  - $\mathbf{x_2 \leq 40}$
  - $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

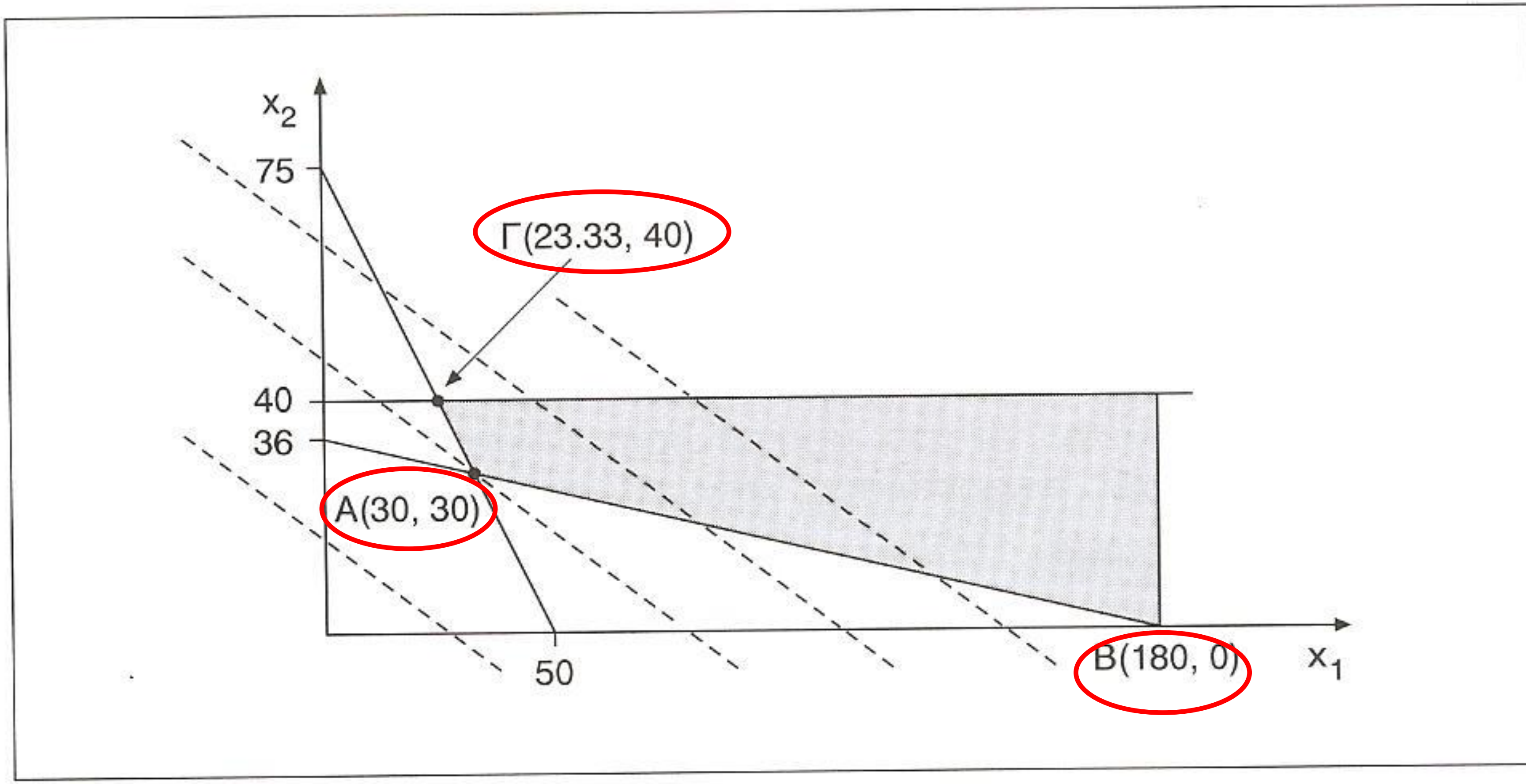
Παραλλαγή (3/5)

- Νέα τυποποιημένη μορφή
  - **Minimize $z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0s_3$**

  με περιορισμούς:
    - **$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 1e_1 = 15$**
    - **$0{,}05x_1 + 0{,}25x_2 - 1e_2 = 9$**
    - **$x_2 + 1s_3 = 40$**
    - **$x_1, x_2, e_1, e_2, s_3 \geq 0$**
  - **e_1, e_2: μεταβλητές πλεονασμού**
  - **s_3: χαλαρή μεταβλητή**

Παραλλαγή (4/5)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής
  - **Α(30 , 30)**
  - **Β(180 , 0)**
  - **Γ(23,33 , 40)**


x_2
75
Γ(23.33, 40)
40
36
A(30, 30)
50
B(180, 0)
x_1

Παραλλαγή (5/5)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	(x_1, x_2)	z	Είδος λύσης
Α	(30, 30)	120	Βέλτιστη
Β	(180, 0)	270	
Γ	(23,33 , 40)	135	
Δ	(180, 40)	370	

Ειδικές περιπτώσεις (1/2)

- Προβλήματα
  - με άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις
  - χωρίς εφικτές λύσεις
  - μη φραγμένα
    - περιπτώσεις όπου η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μεγάλη (ή μικρή) τιμή σε προβλήματα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης)

Ειδικές περιπτώσεις (2/2)

- Οι περιπτώσεις αυτές δεν εμφανίζονται συχνά σε πραγματικά προβλήματα
  - οφείλονται συνήθως σε σφάλματα που ενσωματώθηκαν στο μοντέλο κατά τη φάση της ανάπτυξής του

Παράδειγμα (1/5)

- Έστω μια μικρή επιχείρηση δερμάτινων ενδυμάτων με την επωνυμία «Leather»
- Η εταιρία αναλαμβάνει κυρίως εργασίες για μεγάλες επιχειρήσεις ενδυμάτων που πραγματοποιούν εξαγωγές
- Η μηνιαία απασχόληση του προσωπικού της σε ώρες είναι 960

Παράδειγμα (2/5)

- Για τον επόμενο μήνα έχει αναλάβει την παραγωγή των προϊόντων
  - Ανδρικό δερμάτινο σακάκι
  - Γυναικείο καστόρινο φόρεμα
- Τα υλικά που χρησιμοποιεί είναι
  - Κατεργασμένα δέρματα
  - Φόδρες

Παράδειγμα (3/5)

- Κάθε γυναικείο φόρεμα απαιτεί
  – 5 μέτρα δέρματος
  – 3 μέτρα φόδρας
  – 6 ώρες εργασίας
- Κάθε ανδρικό σακάκι απαιτεί
  – 4 μέτρα δέρματος
  – 1 μέτρο φόδρας
  – 8 ώρες εργασίας

Παράδειγμα (4/5)

- Το περιθώριο κέρδους είναι
  - 200 € για κάθε σακάκι
  - 250 € για κάθε φόρεμα
- Η επιχείρηση στην αρχή του μήνα διαθέτει
  - 600 μέτρα δέρμα
  - 297 μέτρα φόδρα

Παράδειγμα (5/5)

- Σκοπός
  - Να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής για τον επόμενο μήνα, δηλαδή εκείνο το πρόγραμμα παραγωγής γυναικείων φορεμάτων και ανδρικών σακακιών που μεγιστοποιεί το συνολικό περιθώριο κέρδους, λαμβάνοντας υπόψη τους διάφορους περιορισμούς που υπάρχουν

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (1/11)

- Μεταβλητές απόφασης
  - x_1: τεμάχια γυναικείου φορέματος
  - x_2: τεμάχια ανδρικού σακακιού

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (2/11)

- Μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
  - Maximize **$z = 25x_1+20x_2$** (δεκάδες ευρώ)
  - με περιορισμούς
    - $3x_1 + x_2 \le 297$ (φόδρα)
    - $5x_1 + 4x_2 \le 600$ (δέρμα)
    - $6x_1 + 8x_2 \le 960$ (εργασία)
    - $x_1,x_2 \ge 0$ (μη αρνητικότητα)

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (3/11)

- 1ος περιορισμός
  - $\mathbf{3x_1 + x_2 = 297 \Rightarrow x_2 = -3x_1 + 297}$
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο **(99,0)** και τον άξονα y στο σημείο **(0,297)**
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $3x_1 + x_2 \leq 297$

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (4/11)

- 2ος περιορισμός
  - $\mathbf{5x_1 + 4x_2 = 600 \Rightarrow x_2 = -(5/4)x_1 + 150}$
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο **(120,0)** και τον άξονα y στο σημείο **(0,150)**
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $3x_1 + x_2 \leq 297$
  - $5x_1 + 4x_2 \leq 600$

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (5/11)

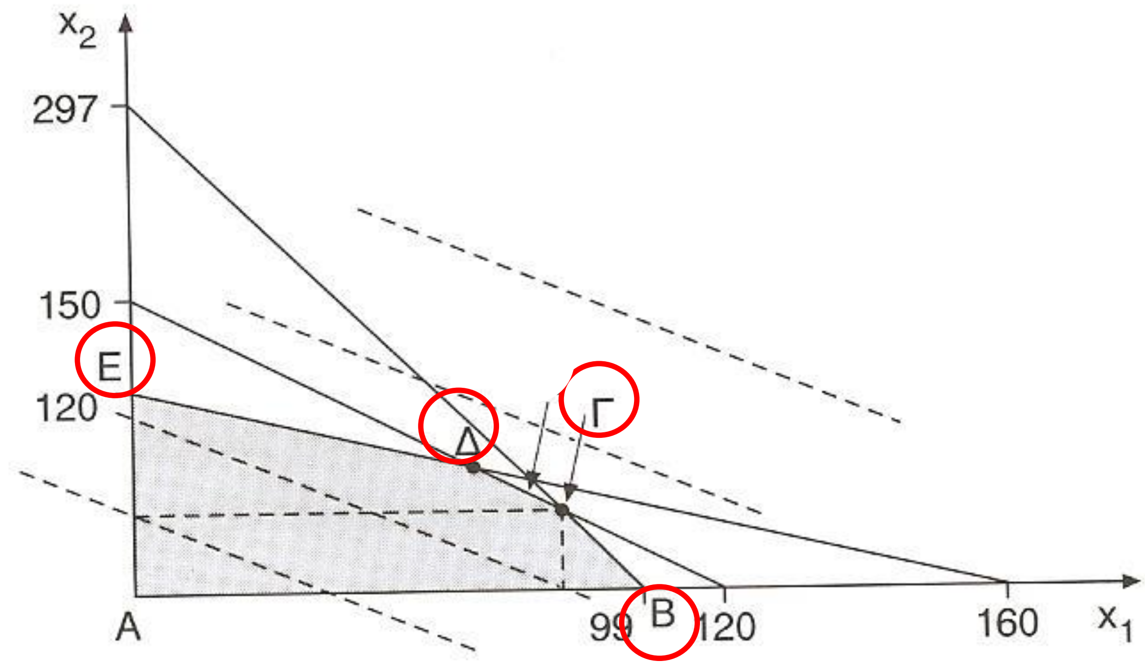
- 3[ος] περιορισμός
  - **$6x_1 + 8x_2 = 960 \Rightarrow x_2 = -(4/3)x_1 + 120$**
- Η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο **(160,0)** και τον άξονα y στο σημείο **(0,120)**
- Η εφικτή περιοχή (μέχρι στιγμής) είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $3x_1 + x_2 \leq 297$
  - $5x_1 + 4x_2 \leq 600$
  - $6x_1 + 8x_2 \leq 960$

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (6/11)

- 4ος περιορισμός
  - $\mathbf{x_1,x_2 \geq 0} \Rightarrow 1^o$ τεταρτημόριο
- Η εφικτή περιοχή είναι αυτή για την οποία ισχύει
  - $3x_1 + x_2 \leq 297$
  - $5x_1 + 4x_2 \leq 600$
  - $6x_1 + 8x_2 \leq 960$
  - $x_1,x_2 \geq 0$

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (7/11)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής
  - **Α(0,0)**
  - **Β(99,0)**
  - **Γ(84,45)**
  - **Δ(60,75)**
  - **Ε(0,120)**



x_2
297
150
Ε
120
Δ
Γ
Α
99
Β
120
160
x_1

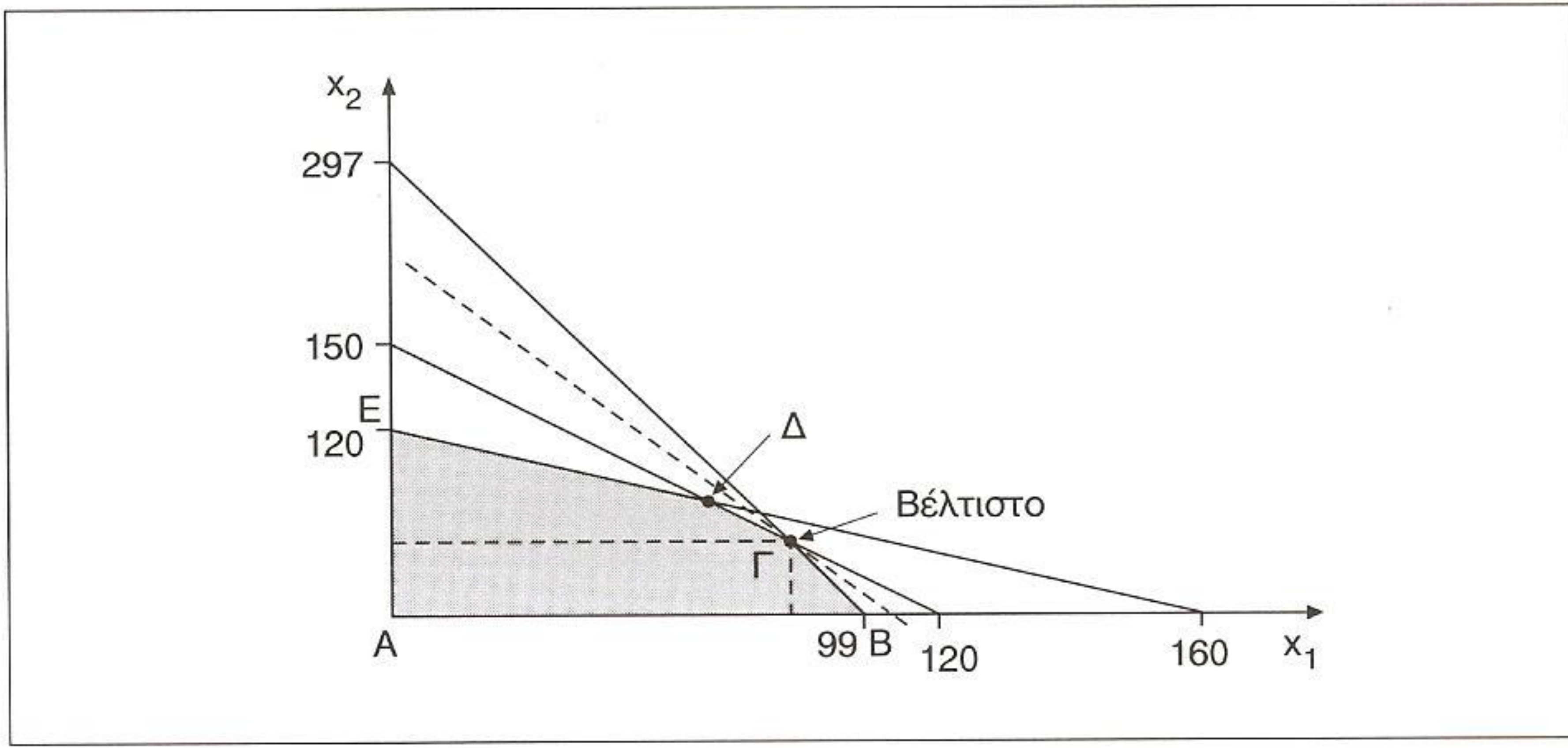
Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (8/11)

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	(x_1, x_2)	z	Είδος λύσης
Α	(0, 0)	0	
Β	(99, 0)	2475	
Γ	(84, 45)	3000	Βέλτιστη
Δ	(60, 75)	3000	Βέλτιστη
Ε	(0, 120)	2400	

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (9/11)

- Βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι <u>οποιοδήποτε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος</u> που ορίζεται από τα σημεία **Γ(84,45**) και **Δ(60,75)**



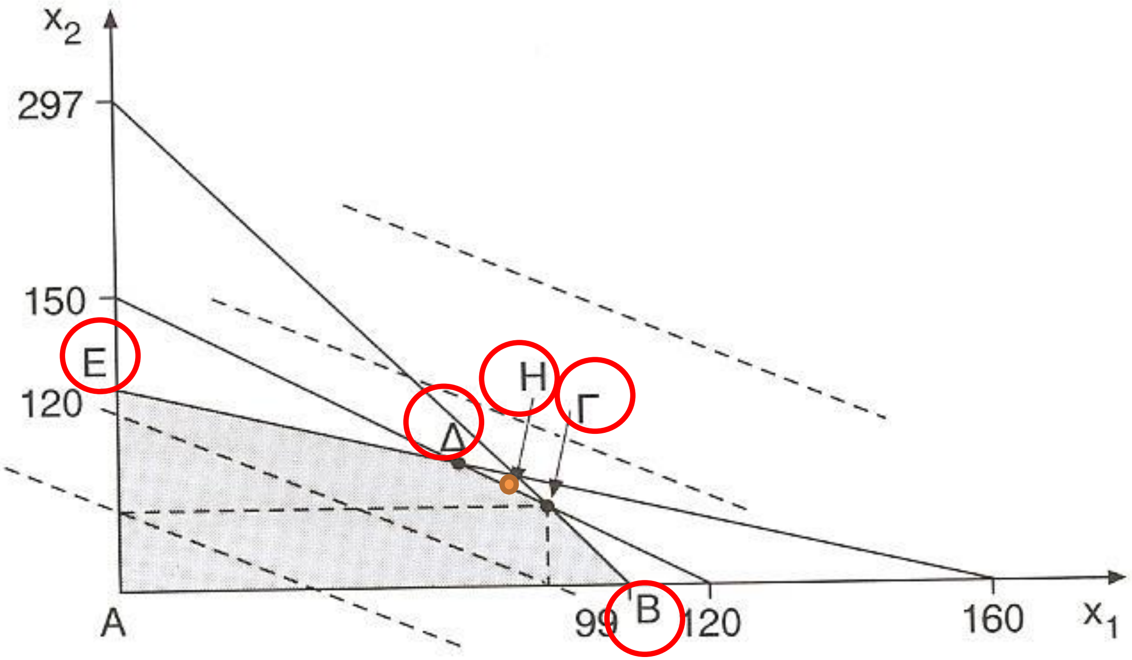
x2
297
150
E
120
Δ
Βέλτιστο
Γ
A
99
B
120
160
x1

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (10/11)

- Στην περίπτωση αυτή έχουμε **άπειρες** εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις διότι
  - η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι **παράλληλη** με κάποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα σύνορα της περιοχής των εφικτών λύσεων

Παράδειγμα – Άπειρες εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (11/11)

- Στην περίπτωση αυτή η επιλογή μιας βέλτιστης λύσης μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση ενός επιπλέον κριτηρίου επιλογής
- Για παράδειγμα
  - Να παράγονται όσο το δυνατόν περισσότερα γυναικεία ενδύματα (σημείο Γ)
  - Να παράγονται όσο το δυνατόν περισσότερα ανδρικά ενδύματα (σημείο Δ)
  - Να υπάρχει σχεδόν ισόποση παραγωγή ανδρικών και γυναικείων ενδυμάτων (σημείο Η)



x_2
297
150
E
120
Η
Γ
Δ
A
99
B
120
160
x_1

Τέλος Υποενότητας 1

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Επιχειρησιακή Έρευνα. Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό ($2^{ο}$ μέρος)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT119.

Σημείωμα Αδειοδότησης