Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017

Εισαγωγή

- Ασχολείται με το πρόβλημα της άριστης κατανομής των **περιορισμένων πόρων** μεταξύ **ανταγωνιζόμενων δραστηριοτήτων** μιας επιχείρησης
- Επικεντρώνεται στον εντοπισμό του **άριστου (βέλτιστου) προγράμματος**, με το οποίο κατανέμονται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο οι περιορισμένοι διαθέσιμοι πόροι μιας επιχείρησης στις ανταγωνιζόμενες δραστηριότητές της, ώστε να ικανοποιηθούν όλοι οι προκαθορισμένοι στόχοι της

Εισαγωγή

- Οι **διαθέσιμοι πόροι** μιας επιχείρησης μπορεί να είναι μεταξύ άλλων:
  - Η εργασία
  - Οι πρώτες ύλες
  - Η δυναμικότητα του εξοπλισμού
  - Τα διαθέσιμα κεφάλαια
  - κ.ά.

Εισαγωγή

- Οι περιορισμοί εκτός από τους διαθέσιμους πόρους μιας επιχείρησης μπορεί να αφορούν και όλες εκείνες τις **αιτίες** που επηρεάζουν τους προκαθορισμένους στόχους της επιχείρησης:
  - Η ζήτηση των προϊόντων
  - Οι προδιαγραφές των προϊόντων
  - Η πολιτική της επιχείρησης
  - Η μέθοδος χρηματοδότησης των δραστηριοτήτων της
  - Οι κανονισμοί λειτουργίας
  - Η νομοθεσία
  - κ.ά.

Εισαγωγή

- Αποσκοπεί στη **μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση)** ενός κριτηρίου απόδοσης:
  - Μεγιστοποίηση κέρδους από τις πωλήσεις των προϊόντων
  - Μεγιστοποίηση μεριδίου αγοράς
  - Ελαχιστοποίηση κόστους παραγωγής των προϊόντων μιας βιομηχανικής επιχείρησης
  - Ελαχιστοποίηση κόστους μεταφοράς ενός προϊόντος από διάφορα κέντρα παραγωγής του σε διάφορα κέντρα κατανάλωσης
  - κ.ά.

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

1. **Πρόβλημα μείγματος προϊόντων**
   - Καθορισμός των επιπέδων παραγωγής των προϊόντων μιας βιομηχανίας με βάση τις διαδικασίες παραγωγής και τους περιορισμούς της αγοράς, ώστε να επιτευχθεί η πιο αποτελεσματική χρήση των παραγωγικών της πόρων με στόχο τη μεγιστοποίηση του προσδοκώμενου κέρδους

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

2. **Πρόβλημα μεταφοράς**
   - Προσδιορισμός ενός προγράμματος διανομής προϊόντων με καθορισμό των δρομολογίων των διαθέσιμων μεταφορικών μέσων και των ποσοτήτων που θα μεταφερθούν, με το οποίο θα ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς των προϊόντων, ενώ συγχρόνως θα ικανοποιηθεί η ζήτηση των πελατών

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

3. **Επιλογή διαφημιστικών μέσων**
   - Κατανομή ενός δεδομένου προϋπολογισμού διαφήμισης στα διάφορα μέσα διαφήμισης, ώστε να μεγιστοποιηθεί η αποδοτικότητα μιας διαφημιστικής εκστρατείας ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

4. **Πρόβλημα δίαιτας**
   - Καθορισμός ημερησίων προγραμμάτων μαζικής διατροφής, ώστε να ικανοποιούνται σε κάθε περίπτωση οι συγκεκριμένες απαιτήσεις σε βασικά θρεπτικά συστατικά με αντίστοιχη ελαχιστοποίηση του κόστους

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

5. **Πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής πολλών σταδίων**
   - Καθορισμός ενός χρονοπρογράμματος παραγωγής που θα ανταποκρίνεται στην προβλεπόμενη ζήτηση για ένα ή περισσότερα προϊόντα με προσδιορισμό των ποσοτήτων κάθε προϊόντος που θα παραχθούν σε κάθε περίοδο και σε κάθε μονάδα παραγωγής, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης των προϊόντων

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

6. **Επιλογή χαρτοφυλακίου**
   - Προσδιορισμός της σύνθεσης ενός επενδυτικού φακέλου με επιλογή ενός συνδυασμού εναλλακτικών επενδυτικών επιλογών με σκοπό την αύξηση της απόδοσης των επενδυμένων κεφαλαίων και την ταυτόχρονη μείωση του επενδυτικού ρίσκου

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

7. **Προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού**
   - Καταρτισμός ενός σχεδίου κατανομής προσωπικού σε διάφορες χρονικές περιόδους που ελαχιστοποιεί κάποια συνάρτηση κόστους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, όπως π.χ. περιορισμένα κεφάλαια, φόρτο εργασίας, απαιτούμενες δεξιότητες και προσόντα, κ.ά.

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

8. **Διαχείριση έργων**
   - Προγραμματισμός των δραστηριοτήτων που αποτελούν ένα έργο ώστε το έργο να ολοκληρωθεί εντός του επιθυμητού χρονικού ορίζοντα με χρήση των διαθέσιμων πόρων και μέσων.

Βασικές έννοιες μοντελοποίησης

- **Πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού**
  - Οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος πρέπει να είναι γραμμικές
- **Μεταβλητές απόφασης**
  - Εκφράζουν ένα σημαντικό μέρος της δομής του συστήματος και πιο συγκεκριμένα εκείνες τις ποσότητες που μπορεί πιθανώς να επηρεάσει ο αναλυτής

Βασικές έννοιες μοντελοποίησης

- **Αντικειμενική συνάρτηση**
  - Η συνάρτηση που εκφράζει το κριτήριο απόδοσης του προβλήματος (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας ποσότητας)
  - Είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές απόφασης
- **Περιορισμοί**
  - Αντιπροσωπεύουν τα διαθέσιμα κεφάλαια για αγορά πρώτων υλών, τη διαθέσιμη ποσότητα των πρώτων υλών, την προσφορά και το κόστος εργασίας, την παραγωγική δυναμικότητα του εξοπλισμού, τις προβλέψεις ζήτησης, τις οικονομικές υποχρεώσεις της επιχείρησης, κ.ά.

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Έστω μια βιομηχανική επιχείρηση γαλακτοκομικών προϊόντων
- Στην προσπάθειά της να διεισδύσει ακόμα περισσότερο στην αγορά γιαουρτιού παράγει μεταξύ άλλων δύο νέα προϊόντα σε οικογενειακή συσκευασία, τα οποία είναι
  - <u>Προϊόν 1:</u> συσκευασία ενός κιλού επιδόρπιου γιαουρτιού με άρωμα βανίλιας
  - <u>Προϊόν 2:</u> συσκευασία ενός κιλού επιδόρπιου γιαουρτιού με κομματάκια σοκολάτας υγείας

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Στον Πίνακα της επόμενης διαφάνειας παρουσιάζονται τα δεδομένα του προβλήματος, όπως έχουν προσδιοριστεί για την παραγωγή μιας μονάδας από κάθε προϊόν
- **Στόχος**
  - Η μεγιστοποίηση του συνολικού εβδομαδιαίου κέρδους από την πώληση των δύο προϊόντων

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

	Απαιτούμενη ποσότητα πόρου ανά μονάδα προϊόντος		
Πόρος	**Προϊόν 1**	**Προϊόν 2**	**Διαθέσιμη ποσότητα πόρου**
Γάλα (λίτρα)	1	1	550
Εργασία (λεπτά χρόνου)	1	3	1000
Παστερίωση και ψύξη (λεπτά χρόνου)	2	5	2000
Μέγιστη ζήτηση (μονάδες προϊόντος)	400	χωρίς όριο	
Κέρδος ανά μονάδα προϊόντος (σε λεπτά του €)	150	200	

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - Ποια στοιχεία του προβλήματος επηρεάζουν το κριτήριο απόδοσης (συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος);
  - Για ποια στοιχεία είμαστε σε θέση να επηρεάσουμε τις τιμές τους και ποια δεν επιδέχονται μεταβολές;
  - Ποιες είναι οι αποφάσεις που πρέπει να πάρουμε και ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης που μπορούν να αποτελέσουν λύση για το πρόβλημα;

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Μεταβλητές απόφασης**
  - x_1: ο αριθμός μονάδων Προϊόντος 1 που παράγονται κάθε εβδομάδα
  - x_2: ο αριθμός μονάδων Προϊόντος 2 που παράγονται κάθε εβδομάδα

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Αντικειμενική συνάρτηση**
  - εβδομαδιαίο κέρδος Προϊόντος 1 + εβδομαδιαίο κέρδος Προϊόντος 2
  - (παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 1 ανά εβδομάδα · κέρδος ανά μονάδα) + (παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 2 ανά εβδομάδα · κέρδος ανά μονάδα)
  - $150x_1 + 200x_2$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Αντικειμενική συνάρτηση**
  - Maximize $\mathbf{z = 150x_1 + 200x_2}$
- **Αντικειμενικοί συντελεστές**
  - Η μοναδιαία συνεισφορά του κέρδους καθενός από τα προϊόντα

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - εβδομαδιαία κατανάλωση γάλακτος ≤ διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος
  - (εβδομαδιαία κατανάλωση γάλακτος για το Προϊόν 1 + εβδομαδιαία κατανάλωση γάλακτος για το Προϊόν 2) ≤ διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - ((απαιτούμενο γάλα για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 1 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 1) + (απαιτούμενο γάλα για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 2 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 2)) ≤ διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος
  - $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 550$
- $\mathbf{x_1 + x_2 \leq 550}$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - συνολική απαιτούμενη εργασία ≤ διαθέσιμη εργασία
  - (απαιτούμενη εργασία για το Προϊόν 1 + απαιτούμενη εργασία για το Προϊόν 2) ≤ διαθέσιμη εργασία

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - ((απαιτούμενη εργασία για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 1 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 1) + (απαιτούμενη εργασία για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 2 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 2)) ≤ διαθέσιμη εργασία
  - $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 1000$
- $\mathbf{x_1 + 3x_2 \leq 1000}$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - συνολική απαιτούμενη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης ≤ διαθέσιμη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης
  - (απαιτούμενη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης για το Προϊόν 1 + απαιτούμενη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης για το Προϊόν 2) ≤ διαθέσιμη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - ((απαιτούμενη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 1 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 1) + (απαιτούμενη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης για την παραγωγή μιας μονάδας Προϊόντος 2 · παραγόμενες μονάδες Προϊόντος 2)) ≤ διαθέσιμη επεξεργασία παστερίωσης και ψύξης
  - $2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 2000$
- $\mathbf{2x_1 + 5x_2 \leq 2000}$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- **Περιορισμοί του προβλήματος**
  - Η εβδομαδιαία ζήτηση για το Προϊόν 1 δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 400 μονάδες
- $\mathbf{x_1 \leq 400}$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Οι τέσσερις γραμμικές ανισώσεις που ορίσαμε παριστάνουν τους περιορισμούς του προβλήματος ως συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης και ονομάζονται **λειτουργικοί περιορισμοί**
- Οι ποσότητες στα δεξιά μέλη των ανισώσεων καλούνται **σταθερές του δεξιού μέλους** των αντίστοιχων περιορισμών και συνήθως εκφράζουν
  - τη διαθέσιμη ποσότητα του αντίστοιχου πόρου
  - το άνω (ή κάτω) φράγμα για την εκτίμηση ενός εξωτερικού συνήθως παράγοντα

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Στο δεξιό μέρος υπάρχουν μόνο σταθερές και ποτέ μεταβλητές
- Οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στους περιορισμούς ονομάζονται **τεχνολογικοί συντελεστές**, γιατί πολλές φορές παριστάνουν την ποσότητα που απαιτείται από τον αντίστοιχο πόρο για την παραγωγή μιας μονάδας ενός συγκεκριμένου προϊόντος

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Αν μια μεταβλητή απόφασης δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές (π.χ. ποσότητα παραγωγής προϊόντος), τότε προσθέτουμε και έναν αντίστοιχο περιορισμό μη αρνητικότητας
  - $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Συνολικό μοντέλο
  - **Maximize $z = 150x_1 + 200x_2$ (αντικειμενική συνάρτηση)**

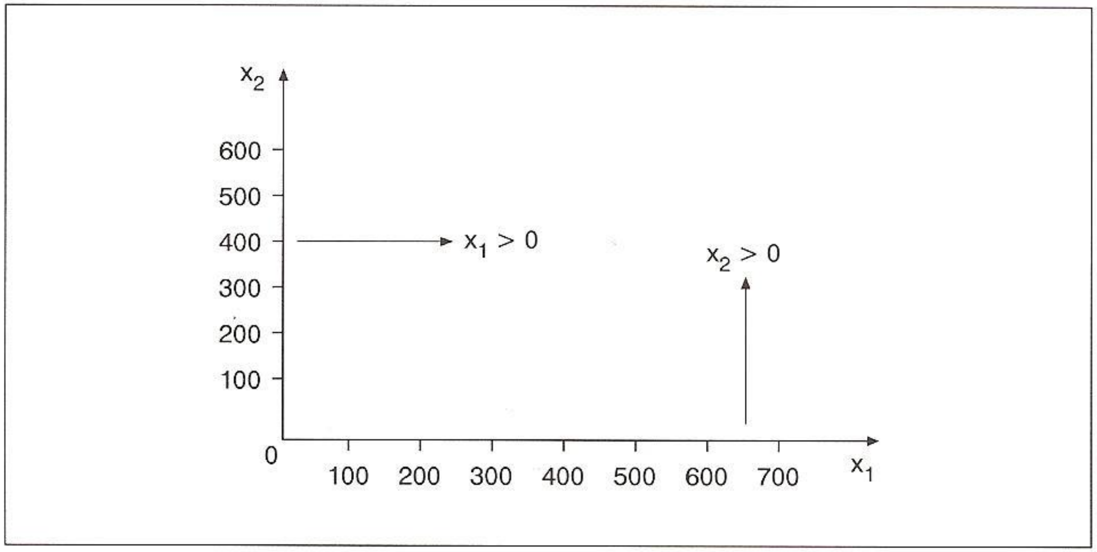
    με περιορισμούς:
    - **$x_1 + x_2 \leq 550$ (γάλα σε λίτρα)**
    - **$x_1 + 3x_2 \leq 1000$ (λεπτά εργασίας)**
    - **$2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (λεπτά παστερίωσης και ψύξης)**
    - **$x_1 \leq 400$ (ζήτηση Προϊόντος 1)**
    - **$x_1, x_2 \geq 0$ (μη αρνητικές τιμές)**

Παράδειγμα προβλήματος μεγιστοποίησης

- Πιθανή λύση
  - Κάθε συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος
- Εφικτή λύση
  - Κάθε πιθανή λύση που δεν παραβιάζει τους περιορισμούς του προβλήματος
- Εφικτή περιοχή
  - Το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος
- Βέλτιστη λύση
  - Η εφικτή λύση που δίνει στην αντικειμενική συνάρτηση τη μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της

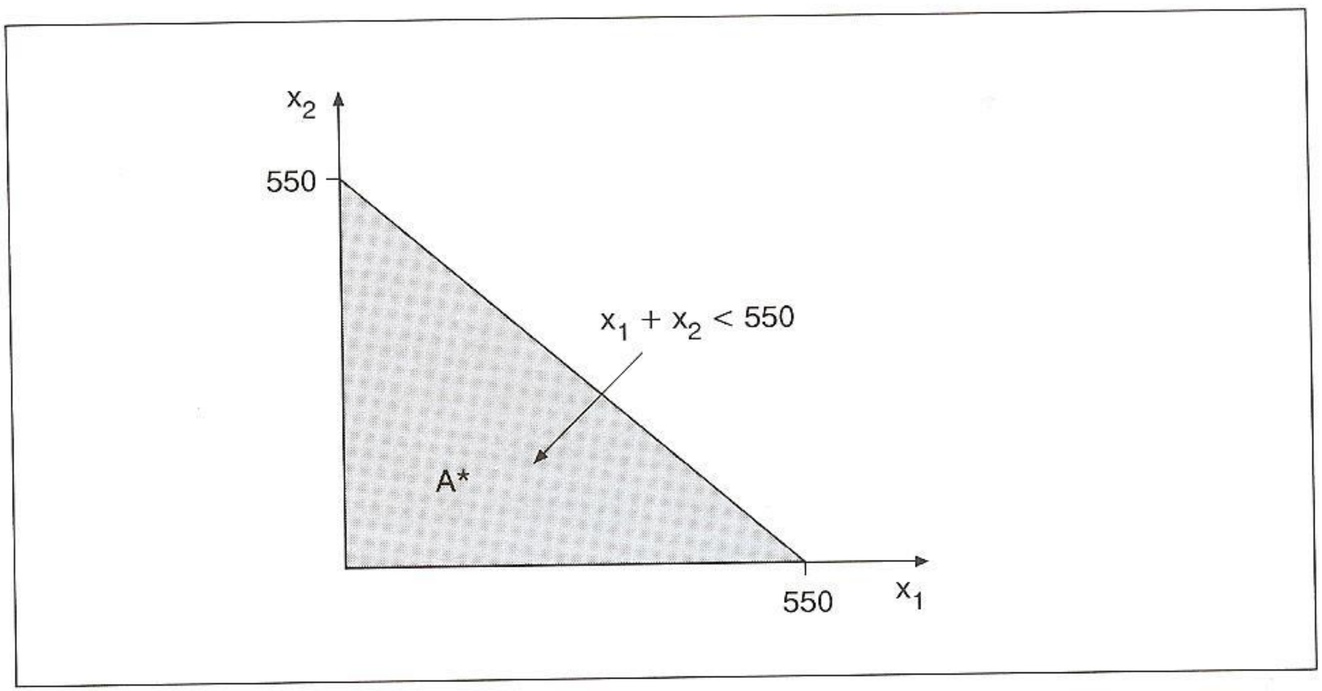
Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $x_1 > 0$
- $x_2 > 0$
- Άρα βρισκόμαστε στο 1ο τεταρτημόριο



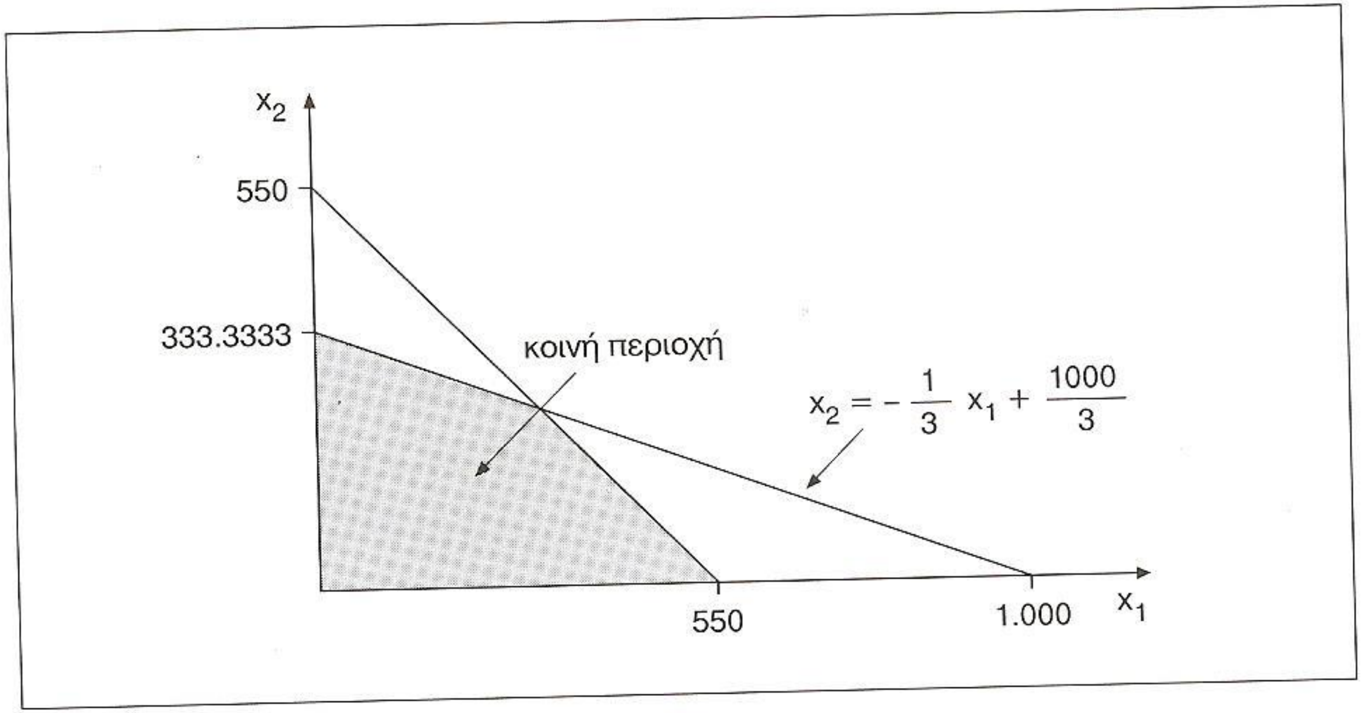
Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $x_1 + x_2 = 550 \Rightarrow x_2 = -x_1 + 55$



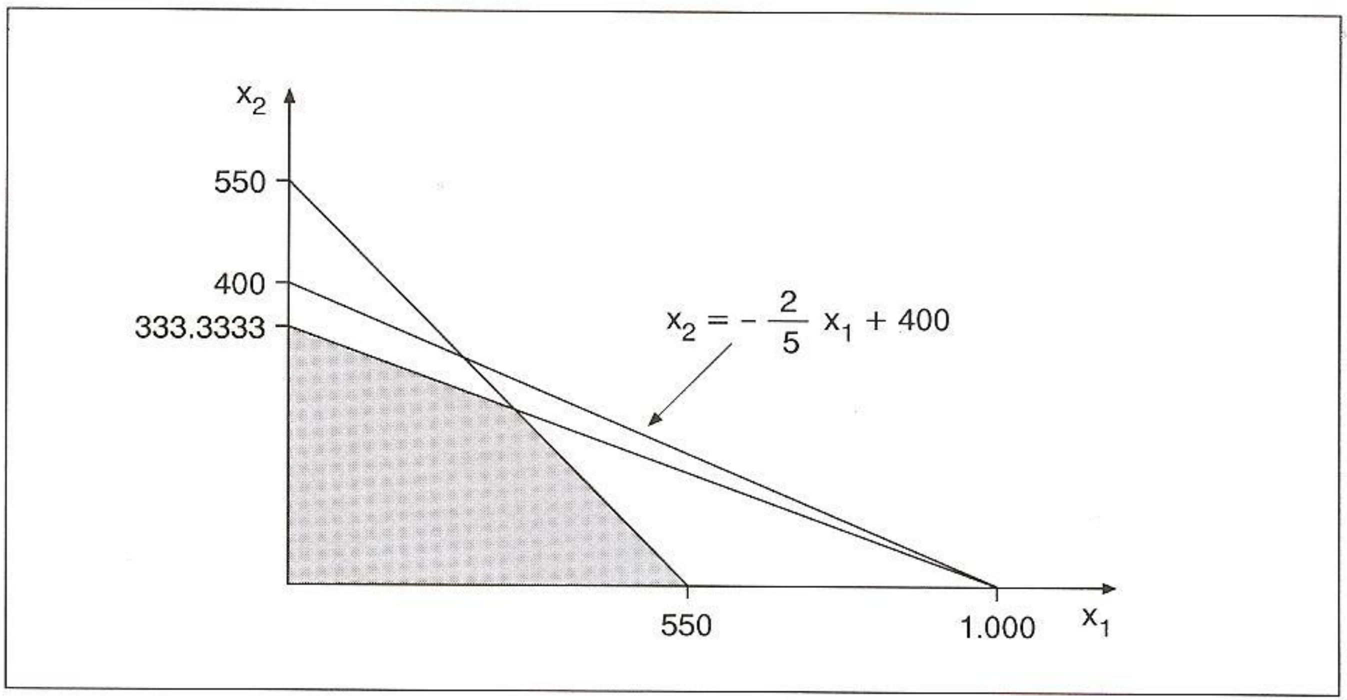
Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $x_1 + 3x_2 = 1000 \Rightarrow x_2 = -(1/3)x_1 + 333{,}333$



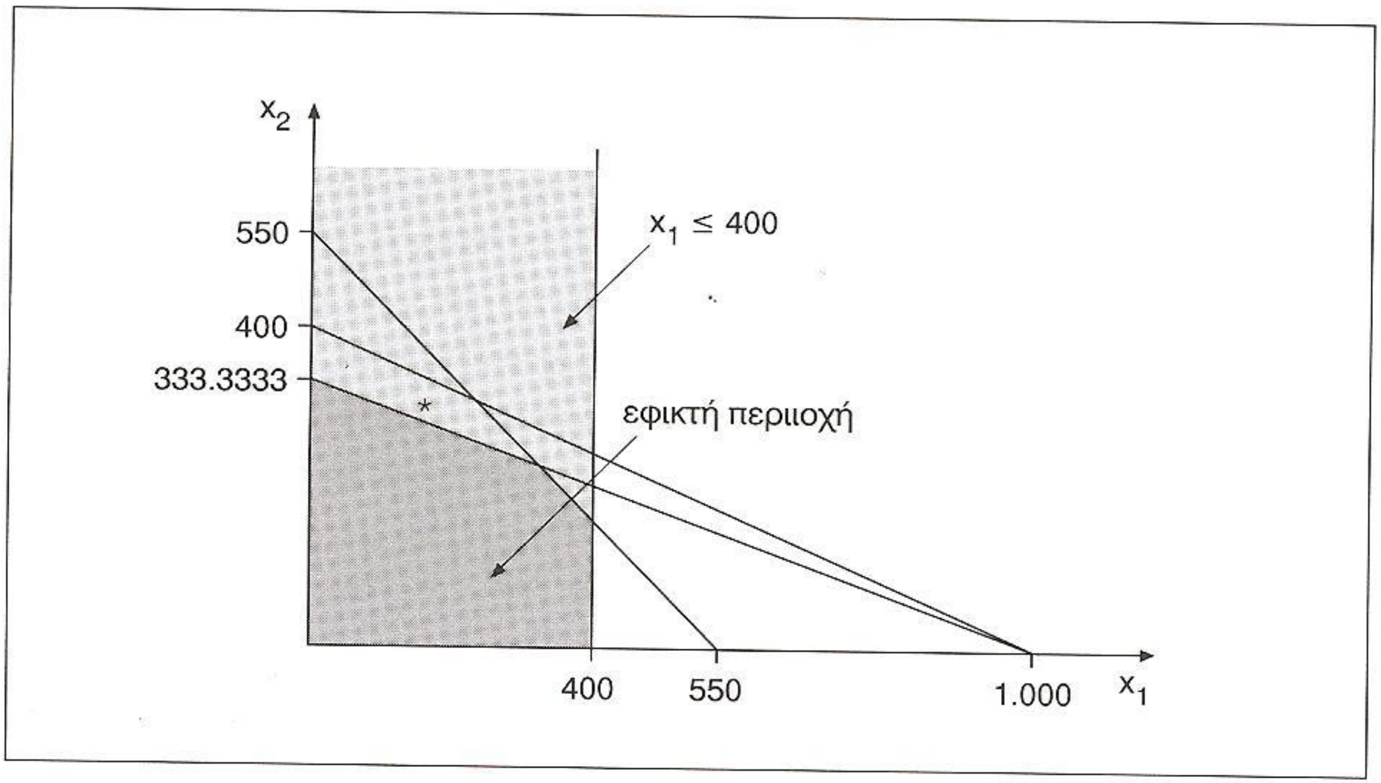
Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $2x_1 + 5x_2 = 2000 \Rightarrow x_2 = -(2/5)x_1 + 400$



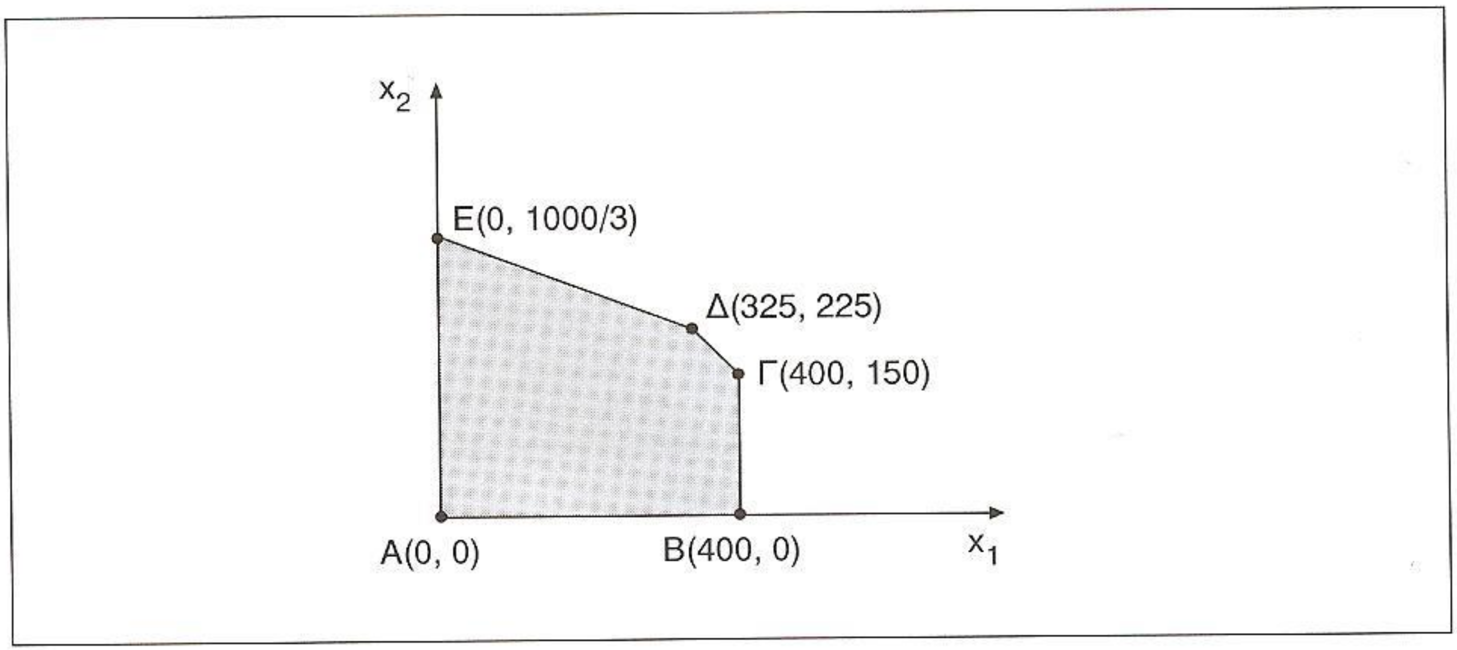
Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- $x_1 = 400$



Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής



Γραφική Επίλυση του Μοντέλου

- Η βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μία από τις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	**(x_1, x_2)**	**z**	
Α	(0,0)	0	
Β	(400, 0)	60.000	
Γ	(400, 150)	90.000	
Δ	(325, 225)	93.750	Βέλτιστη
Ε	(0, 333,333)	66.666,667	

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Η αχρησιμοποίητη ποσότητα ενός πόρου σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού εκφράζεται από την τιμή μιας μεταβλητής που ονομάζεται **χαλαρή μεταβλητή** και που σχετίζεται με τον αντίστοιχο περιορισμό
- Η χαλαρή μεταβλητή είναι μια βοηθητική μεταβλητή, η οποία προστίθεται σε ένα περιορισμό με φορά "≤" (μικρότερο) καθιστώντας τον ισότητα

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Σε κάθε περιορισμό i αντιστοιχεί μια χαλαρή μεταβλητή s_i, $i = 1, \ldots, N$, όπου N το πλήθος των περιορισμών
- Η προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών οδηγεί στην **τυποποιημένη μορφή** του προβλήματος, όπου όλοι οι περιορισμοί του έχουν μετατραπεί σε ισότητες και τα δεξιά μέλη είναι μη αρνητικά

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Τυποποιημένη μορφή
  - **Maximize $z = 150x_1 + 200x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$**

  με περιορισμούς:
    - $x_1 + x_2 + 1s_1 = 550$
    - $x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$
    - $2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$
    - $x_1 + 1s_4 = 400$
    - $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- **Μη δεσμευτικοί περιορισμοί**
  - Οι περιορισμοί που μετά την επίλυση και τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης έχουν την αντίστοιχη χαλαρή μεταβλητή μεγαλύτερη από το μηδέν
  - Δηλώνουν ότι υπάρχει στη διάθεση της επιχείρησης μεγαλύτερη ποσότητα από όση τελικά καταναλώνεται στο άριστο πρόγραμμα παραγωγής (στη βέλτιστη λύση)
  - Δεν καθορίζουν την κορυφή που δίνει τη βέλτιστη λύση

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

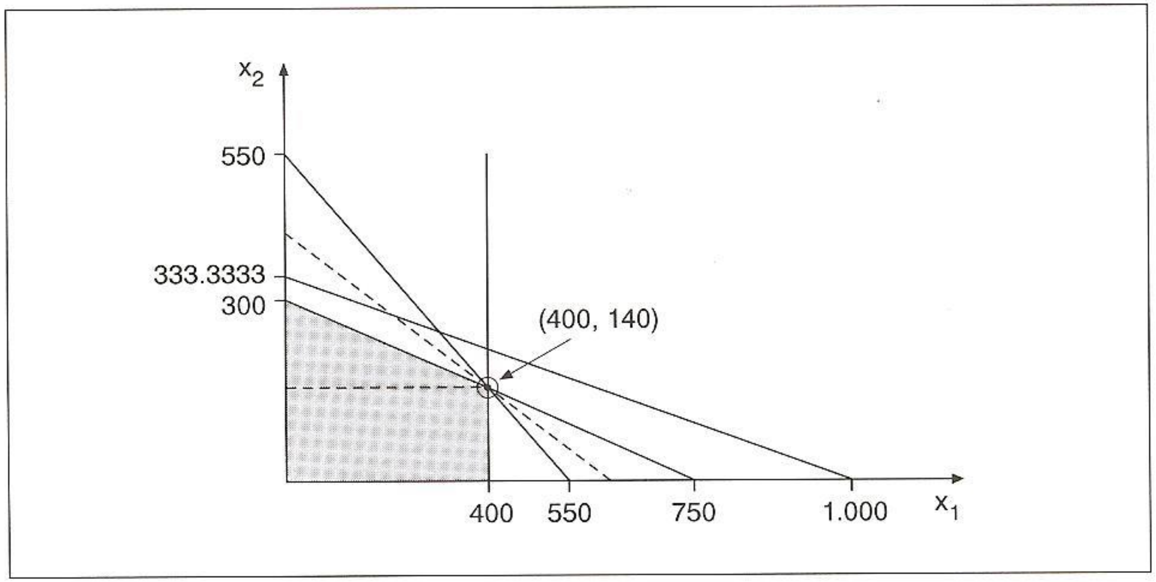
- **Δεσμευτικοί περιορισμοί**
  - Έχουν την αντίστοιχη χαλαρή μεταβλητή ίση με το μηδέν
  - Καθορίζουν την κορυφή της εφικτής περιοχής που δίνει τη βέλτιστη λύση
  - Ισχύουν ως ισότητες μετά την εύρεση της βέλτιστης λύσης

Δεσμευτικοί και μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- **Πλεονάζων περιορισμός**
  - Είναι ένας μη δεσμευτικός περιορισμός που δεν επηρεάζει την εφικτή περιοχή
  - Προσοχή όμως, δεν είναι ένας «άχρηστος» περιορισμός
  - Αποτελεί μία χρήσιμη πληροφορία, η οποία μπορεί να χρησιμέψει αργότερα στη λήψη της βέλτιστης απόφασης, σε περίπτωση που μεταβληθούν κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος

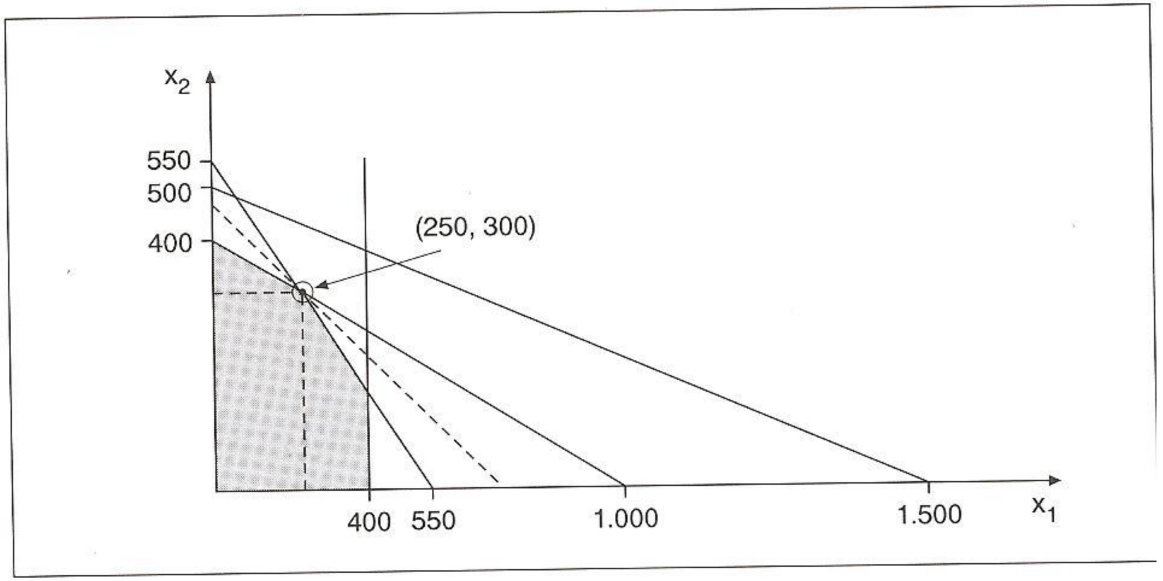
Παραλλαγή

- Μείωση σταθεράς δεξιού μέλους 3ου περιορισμού από 2000 σε 1500 λεπτά
  - $2x_1 + 5x_2 \le 1500$
  - $2x_1 + 5x_2 = 1500 \Rightarrow x_2 = -(2/5)x_1 + 300$



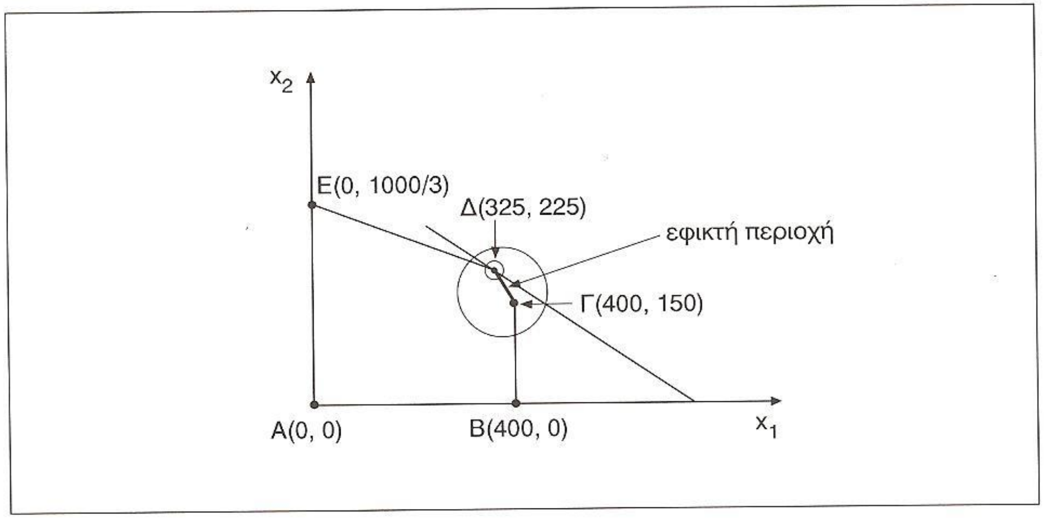
Παραλλαγή

- Αύξηση σταθεράς δεξιού μέλους 2ου περιορισμού από 1000 σε 1500 λεπτά
  - $x_1 + 3x_2 \le 1500$
  - $x_1 + 3x_2 = 1500 \Rightarrow x_2 = -(1/3)x_1 + 500$



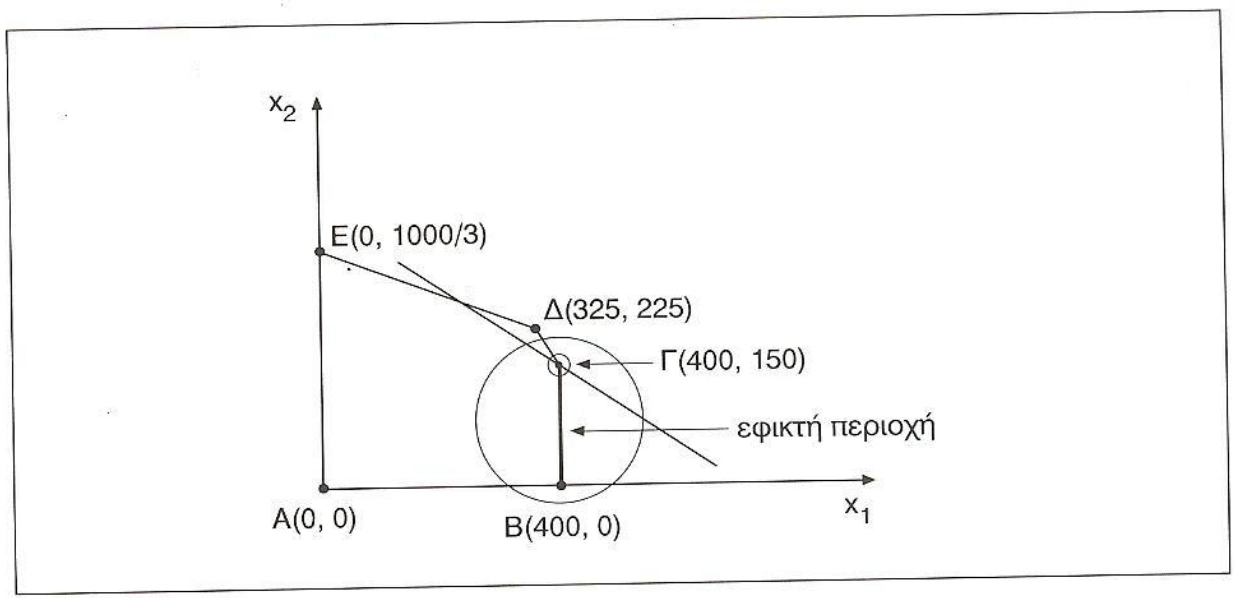
Παραλλαγή

- Κατανάλωση όλου του γάλατος που έχει δεσμευτεί για την παραγωγή γιαουρτιού
- $x_1 + x_2 = 550$



Παραλλαγή

- Παραγωγή ακριβώς 400 μονάδων από το Προϊόν 1
- $x_1 = 400$



Άσκηση 1η

- Μία σπουδάστρια θέλει να στείλει, από το μέρος που σπουδάζει, 12 τουλάχιστον κάρτες σε φίλους και συγγενείς
- Οι ασπρόμαυρες κάρτες κοστίζουν 1€ και οι έγχρωμες 2€ η μία, αλλά η σπουδάστρια δεν διαθέτει πάνω από 16€
- Πόσες κάρτες από κάθε είδος μπορεί να αγοράσει;
- Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός καρτών που μπορεί να αγοράσει;

Άσκηση 1η

- Επιλύστε γραφικά τη συγκεκριμένη άσκηση

Άσκηση 2η

- Ένας μηχανικός πρόκειται να φέρει από το εξωτερικό τόρνους και τρυπάνια
- Οι συσκευές έρχονται λυμένες και ο μηχανικός θα τις συναρμολογήσει και θα τις μεταπωλήσει
- Συνολικά μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι 50 συσκευές
- Κάθε τόρνος κοστίζει 40€ και κάθε τρυπάνι 20€
- Ο μηχανικός μπορεί να διαθέσει μέχρι 1400 € για την αγορά τους
- Υπολογίζει να κερδίσει 60€ από κάθε τόρνο και 40 € από κάθε τρυπάνι
- Με αυτές τις συνθήκες πόσους τόρνους και τρυπάνια πρέπει να αγοράσει για να κερδίσει περισσότερα;

Άσκηση 2η

- Επιλύστε γραφικά τη συγκεκριμένη άσκηση