Στατιστική Ι

Γιώργος Τσιρογιάννης

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων και Τροφίμων,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ακαδημαϊκό έτος: 2020-2021

Διάλεξη 9η

Βασικές συνεχείς κατανομές

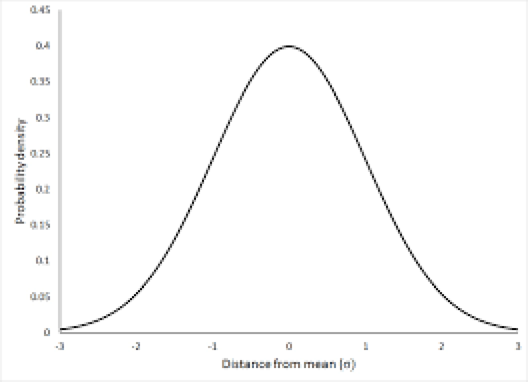
- Κανονική
- Χ – τετράγωνο
- Τ – student
- F

7.1– 7.3

Κανονική κατανομή

- Η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής
- Εξαιρετικά ευρύ φάσμα θεωρητικών και πραγματικών εφαρμογών

Κανονική κατανομή

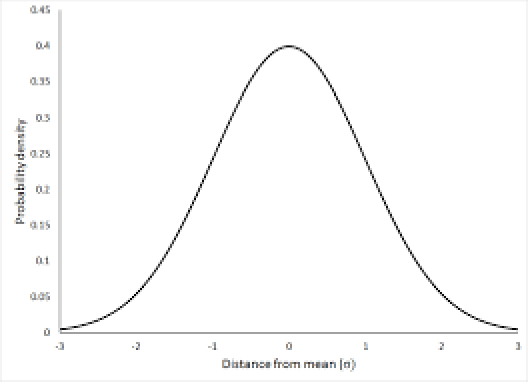


- Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

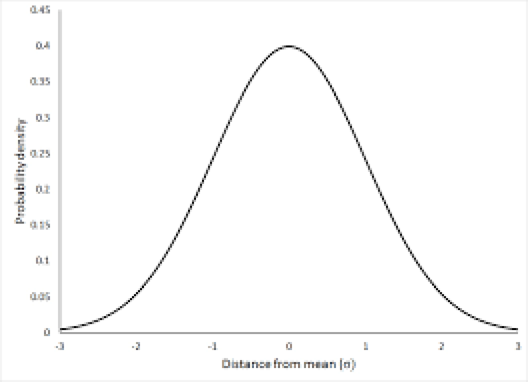
όπου, σ > 0 η *τυπική απόκλιση* και μ ∈(−∞,+ ∞) η *μέση τιμή* της κατανομής

Ιδιότητες κανονικής κατανομής



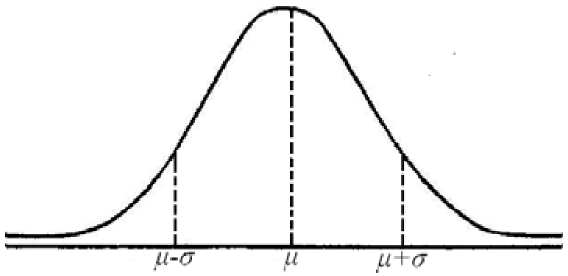
- Η κανονική καμπύλη είναι συμμετρική και οι «ουρές» της πλησιάζουν τον οριζόντιο άξονα ομαλά (ασυμπτωτικά).
- Η μέση τιμή και η διάμεσος ταυτίζονται.
- Η κορυφή ταυτίζεται με τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Η περιοχή που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη πυκνότητα, βρίσκεται και αυτή στο μέσο της κατανομής:
  - γύρω από τη μέση τιμή τους υπάρχουν σχετικά πολλές τιμές ενώ μακριά από τη μέση τιμή βρίσκονται σχετικά λίγες τιμές

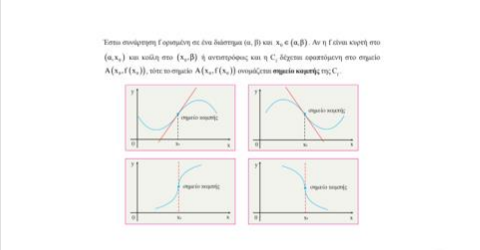
Ιδιότητες κανονικής κατανομής



- Στη θέση x = μ παρουσιάζει μέγιστη τιμή, ίση με $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0.399}{\sigma}$

- Στις θέσεις x = μ −σ και x = μ +σ παρουσιάζει σημεία καμπής



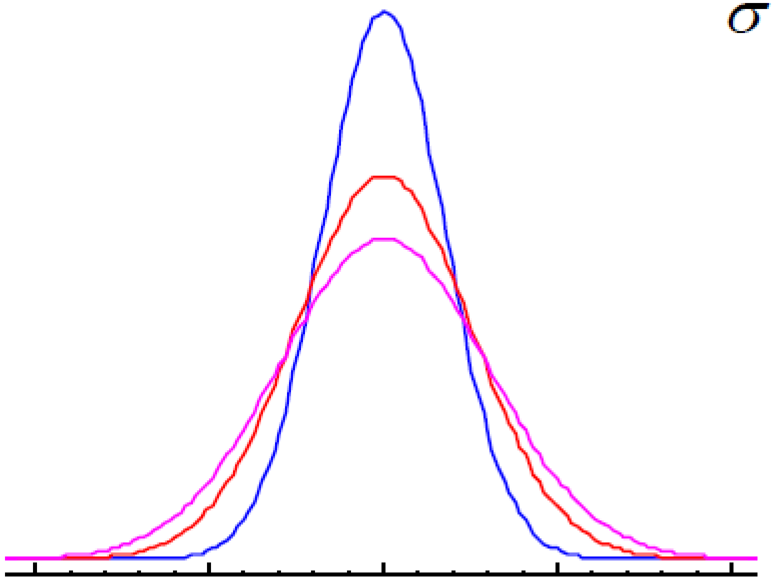


http://www.kosmonaftis.gr/gomath/math_clkat2/bibliomath_209-218.pdf

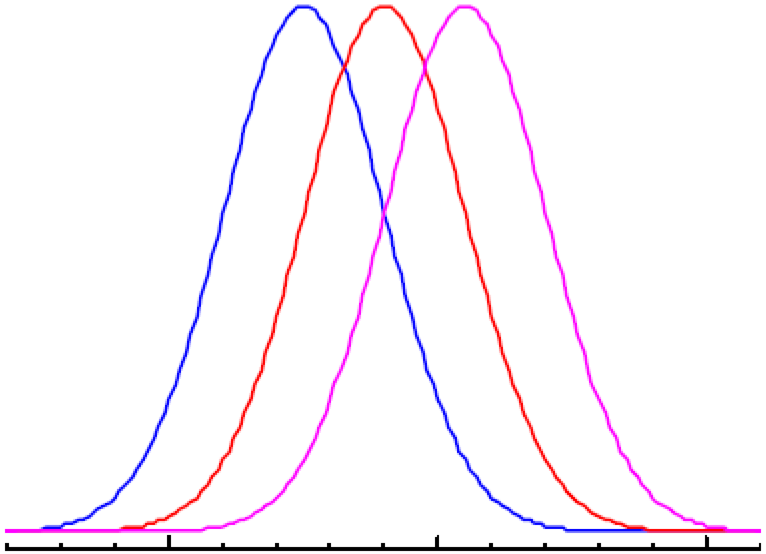
Ο ρόλος της μέσης τιμής και διακύμανσης

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$N(\mu, \sigma^2)$$



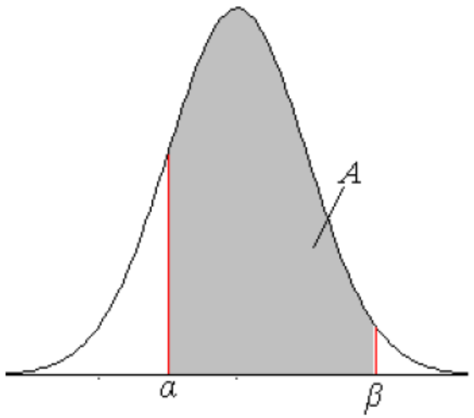
Ίδια μέση τιμή και
διαφορετική τυπική
απόκλιση



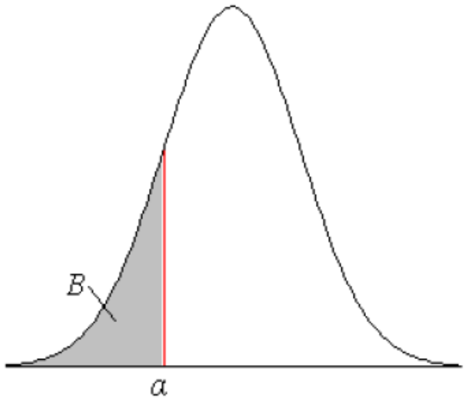
Ίδια τυπική απόκλιση και
διαφορετική
μέση τιμή

Όσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση, τόσο ψηλότερη και
τόσο πιο στενή είναι η κανονική καμπύλη,

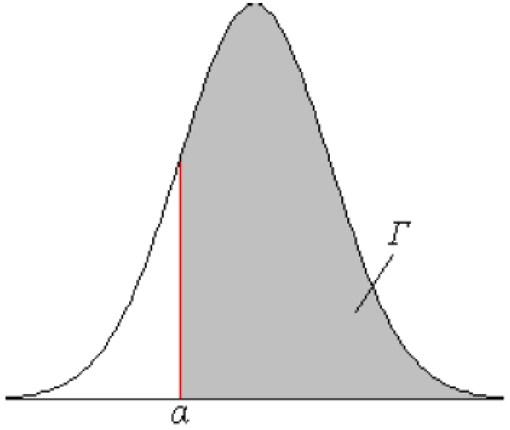
Υπολογισμός πιθανοτήτων



$$A = P(\alpha \leq X \leq \beta)$$



$$B = P(X \leq \alpha)$$



$$\Gamma = P(X \geq a)$$

Πρόταση

- Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f, τότε:

$$\alpha)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\beta)\ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\gamma)\ f(x) = F'(x) \quad \text{(στα σημεία συνέχειας της } f\text{)}$$

δ) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς α, β με $\alpha \leq \beta$

$$(i)\ \ P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

$$(ii)\ \ P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta)$$

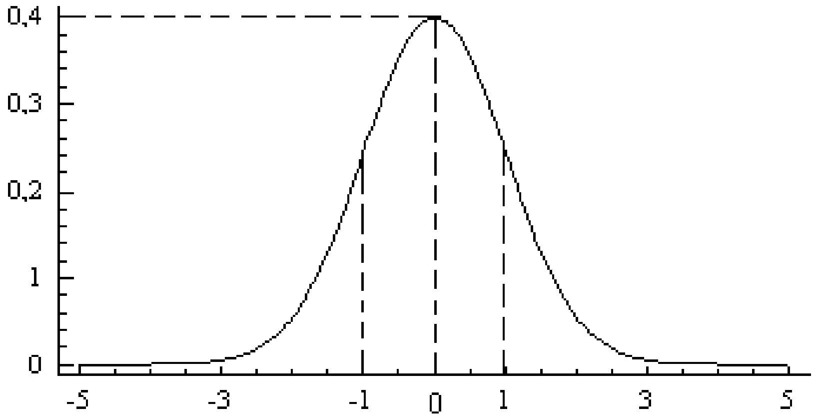
49

Τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

- Είναι η κανονική κατανομή που έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1 με συνάρτηση πυκνότητας

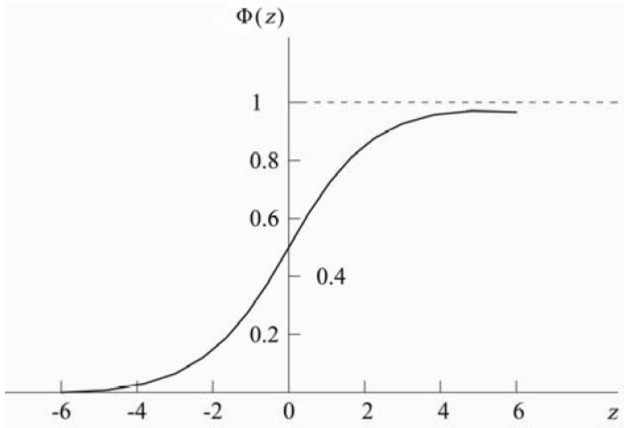
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty$$

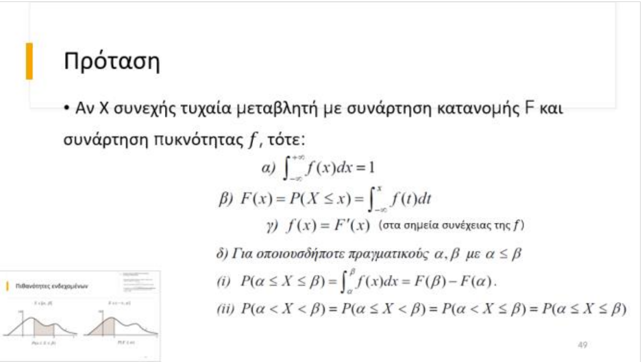


Τυποποιημένη κανονική κατανομή

- Αθροιστική συνάρτησης κατανομής

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \; -\infty < z < +\infty$$




Πρόταση

- Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f, τότε:

$\alpha)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\beta)\ F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$\gamma)\ f(x) = F'(x)$ (στα σημεία συνέχειας της f)

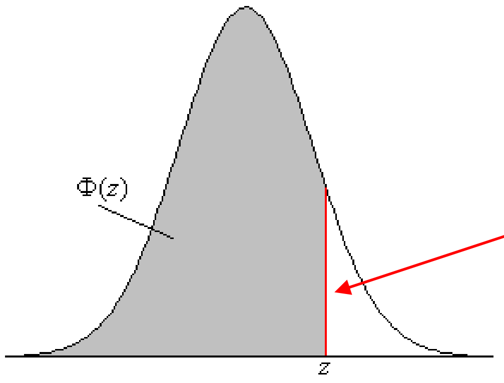
$\delta)$ Για οποιουσδήποτε πραγματικούς α, β με $\alpha \le \beta$

$(i)\ P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

$(ii)\ P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$

Υπολογισμός πιθανοτήτων

- Χρησιμοποιούμε τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1)



$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

+0.01

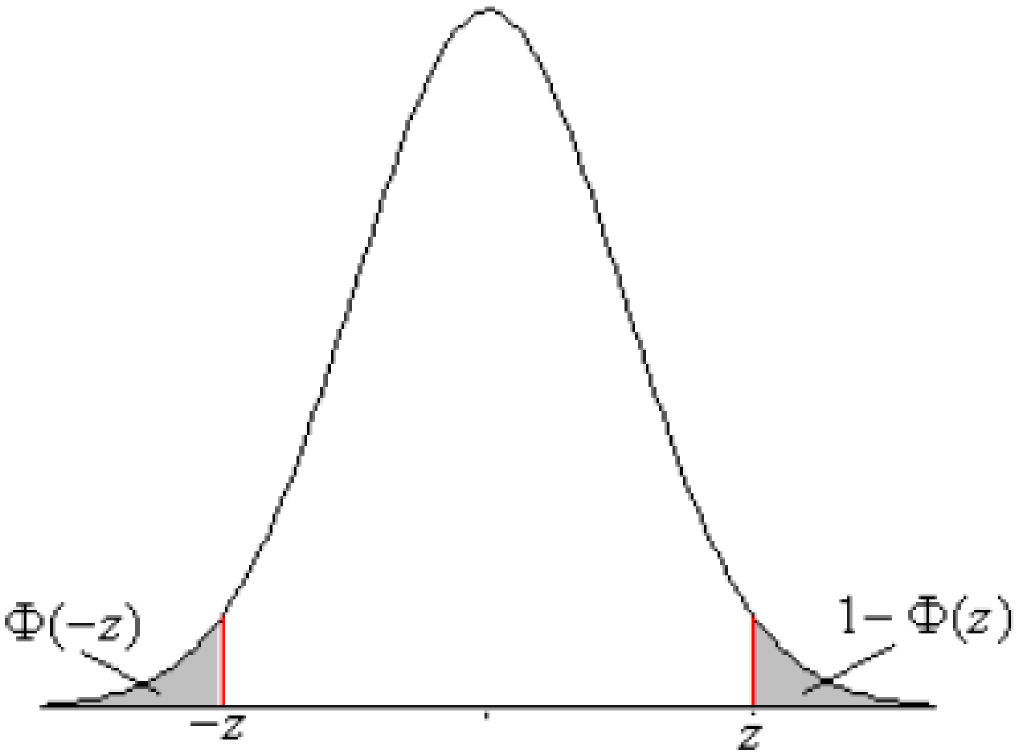
z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
+0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55966	.56360	.56749	.57142	.57535
+0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
+0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
+0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
+0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
+0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
+0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
+0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
+0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
+1	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
+1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
+1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
+1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91308	.91466	.91621	.91774
+1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
+1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
+1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
+1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
+1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
+1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
+2	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
+2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
+2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
+2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
+2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
+2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
+2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
+2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
+2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
+2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
+3	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
+3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
+3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
+3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
+3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
+3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
+3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
+3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
+3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
+3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997
+4	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998

Αρνητικές τιμές;

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
+0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55966	.56360	.56749	.57142	.57535
+0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
+0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
+0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
+0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
+0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
+0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
+0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
+0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
+1	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
+1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
+1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
+1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91308	.91466	.91621	.91774
+1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
+1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
+1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
+1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
+1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
+1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
+2	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
+2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
+2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
+2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
+2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
+2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
+2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
+2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
+2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
+2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
+3	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
+3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
+3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
+3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
+3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
+3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
+3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
+3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
+3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
+3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997
+4	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

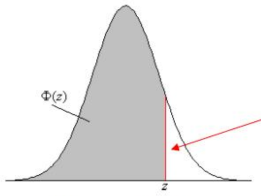
$$P(Z \le -z) = \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



Υπολογισμός πιθανοτήτων

Υπολογισμός πιθανοτήτων

- Χρησιμοποιούμε τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1)



$$\Phi(z) = P(Z \le z)$$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
+0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
+0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55966	.56360	.56749	.57142	.57535
+0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
+0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
+0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
+0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
+0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
+0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
+0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
+0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
+1	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
+1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
+1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
+1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91308	.91466	.91621	.91774
+1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
+1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
+1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
+1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
+1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
+1.9	.97128	$\boxed{.97193}$	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
+2	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
+2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
+2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
+2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
+2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
+2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
+2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
+2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
+2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
+2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
+3	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
+3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
+3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
+3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
+3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
+3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
+3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
+3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
+3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
+3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997
+4	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998

Χρήσιμες ιδιότητες

$$P(\alpha \le Z \le \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$P(-\alpha \le Z \le \alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1$$

$$P(Z > a) = 1 - P(Z \le \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)\,.$$

Παράδειγμα

- $P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0.5$
- $P\ (Z \leq 1.37) = \Phi(1.37) = 0.9147$
- $P(Z > 1.37) = 1 - P(Z \leq 1.37) = 1 - \Phi(1.37) = 1 - 0.9147 = 0.0853$
- $P(Z \leq -1.55) = \Phi(-1.55) = 1 - \Phi(1.55) = 1 - 0.9394 = 0.0606$
- $P(-1.55 \leq Z \leq 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(-1.55) = \Phi(2.1) - [1 - \Phi(1.55)] =$
  $= \Phi(2.1) - 1 + \Phi(1.55) = 0.9821 - 1 + 0.9394 = 0.9215$

Εύρεση πιθανοτήτων οποιασδήποτε κανονικής κατανομής

- Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μια κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική N(0,1).

- Οπότε ισχύει $P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma})$

Εύρεση πιθανοτήτων οποιασδήποτε κανονικής κατανομής μέσω της τυποποιημένης

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}) = P(\frac{\alpha - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{\beta - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}).$$

$$P(X \leq \beta) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta - \mu}{\sigma})$$

Παράδειγμα

- Ο χρόνος, έστω Χ, που χρειάζεται ένα ασθενοφόρο για να φθάσει από ένα κέντρο υγείας στο πλησιέστερο περιφερειακό νοσοκομείο, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 17$min και τυπική απόκλιση $\sigma = 3$min. Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος που θα χρειασθεί το ασθενοφόρο για να φθάσει στο περιφερειακό νοσοκομείο να είναι
  - α) το πολύ 15 min
  - β)περισσότερο από 22 min
  - γ) τουλάχιστον 13 min και το πολύ 21 min.

Παράδειγμα

α) $$P(X \le 15) = P\left(\frac{X-17}{3} \le \frac{15-17}{3}\right) = P(Z \le -0.67) = \Phi(-0.67) =$$

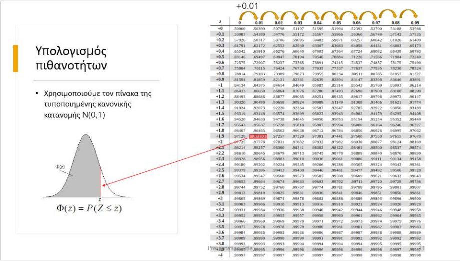
$$= 1 - \Phi(0.67) = 1 - 0.7486 = 0.25$$

β) $$P(X > 22) = P\left(\frac{X-17}{3} > \frac{22-17}{3}\right) = P(Z > 1.67) = 1 - P(Z \le 1.67) =$$

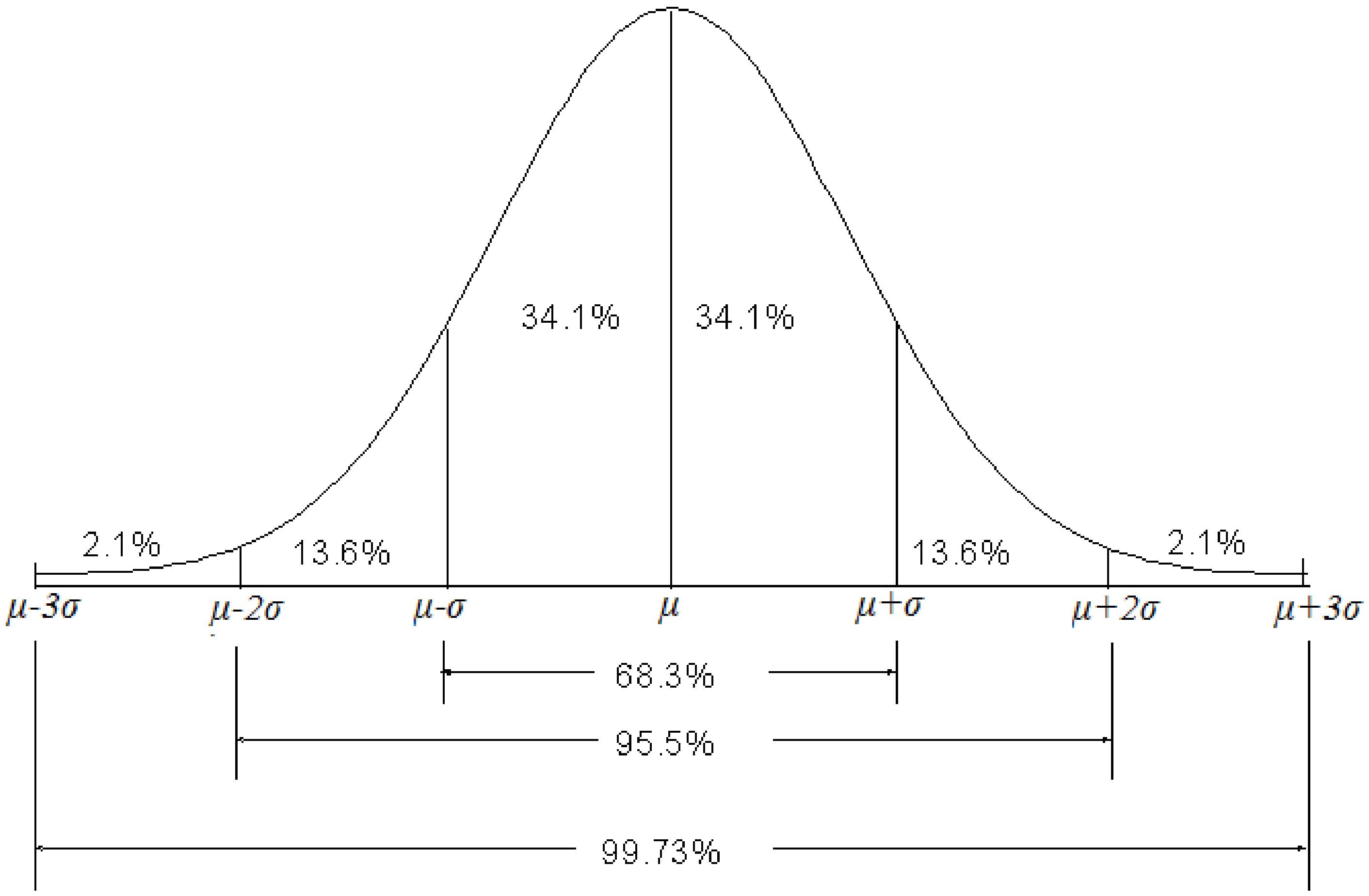
$$= 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

γ) $$P(13 \le X \le 21) = P\left(\frac{13-17}{3} \le \frac{X-17}{3} \le \frac{21-17}{3}\right) = P(-1.33 \le Z \le 1.33) =$$

$$= 2\Phi(1.33) - 1 = 2 \cdot 0.9082 - 1 = 0.8164$$



Πιθανότητες σε σχέση της τιμής του σ



$$P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) = 2\Phi(1)-1 = 0.6826 \cong 68.3\%$$
$$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) = 2\Phi(2)-1 = 0.9544 \cong 95.5\%$$
$$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 2\Phi(3)-1 = 0.9974 \cong 99.7\%$$

Μίξεις κανονικών τμ

- Αν $X_1, X_2, X_{3,} \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim N(\mu_i, {\sigma_i}^2)$ για $i = 1, \ldots, n$ τότε

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\nu,\ \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_\nu^2)$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ για $i = 1, \ldots, n$ τότε

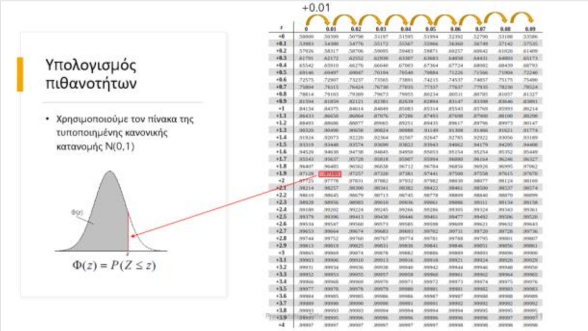
$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu,\ \nu\sigma^2) \qquad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu} \sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{\nu})$$

Παράδειγμα

- Οι ακαθάριστες εβδομαδιαίες εισπράξεις μιας κτηνοτροφικής μονάδας από την πώληση του γάλακτος που παράγει είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 2200 € και τυπική απόκλιση 230 €.
- Ποια είναι η πιθανότητα τις επόμενες δύο εβδομάδες οι συνολικές ακαθάριστες εισπράξεις της μονάδας από την πώληση του γάλακτος που παράγει να ξεπερνούν τις 5000 €;

Παράδειγμα

- Έστω X_1 οι ακαθάριστες εισπράξεις από την πώληση του γάλακτος την πρώτη εβδομάδα και X_2 τη δεύτερη εβδομάδα.
- Δίνεται ότι $X_1 \sim N(2.200,\ 230^2)$ και $X_2 \sim N(2.200,\ 230^2)$
- Συνολικές εισπράξεις: $S_2 = X_1 + X_2$



$$S_2 \sim N(4400,\ 2 \cdot 230^2)$$

$$P(S_2 > 5000) = P(Z > \frac{5000 - 4000}{\sqrt{2 \cdot 230^2}}) = P(Z > 1.84) = 1 - \Phi(1.84) = 0.0329$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem)

- Αν $X_1, X_2, X_{3,} \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή με $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$ για $i = 1, \ldots, n$ για πολύ μεγάλα ν (θεωρητικά $\nu \to \infty$) ισχύει

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}) \quad \text{και} \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \nu\sigma^2)$$

Πόσο μεγάλο πρέπει
να είναι το ν; Τουλάχιστον 30

Παράδειγμα

- Τα μήλα Starking Delicious που παράγονται στο οροπέδιο της Τεγέας έχουν μέσο βάρος $\mu = 220gr$ με τυπική απόκλιση $\sigma = 80gr$. Στο συσκευαστήριο του τοπικού συνεταιρισμού τα μήλα συσκευάζονται σε κιβώτια των 60 μήλων και προωθούνται στα ψυγεία και την αγορά.
- Μπορούμε να υπολογίσουμε ποιο ποσοστό (κατά προσέγγιση) των κιβωτίων περιέχει μήλα με μέσο βάρος μεταξύ 200 και 250gr;

Παράδειγμα

- Δυσκολία: δεν γνωρίζουμε την κατανομή του βάρους μόνο την μέση τιμή και την διακύμανση
- Τα βάρη των μήλων κάθε κιβωτίου είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν = 60 από τον πληθυσμό των βαρών των μήλων όλης της παραγωγής
- Ποιο ποσοστό (κατά προσέγγιση) των δειγματικών μέσων βρίσκεται μεταξύ 200 και 250gr;

Παράδειγμα

- Έστω η X τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το βάρος ενός τυχαία επιλεγμένου μήλου.
- Από το ΚΟΘ ξέρουμε πώς η μέση τιμή θα ακολουθεί την κανονική κατανομή $\overline{X} \sim N(220, 106.67)$

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 220gr \qquad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{\nu} = \frac{80^2}{60} = 106.67\, gr^2$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem)

- Αν $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή με $E(X_i) = \mu$ και $Var(X_i) = \sigma^2$ για $i = 1, \dots, n$ για πολύ μεγάλα ν (θεωρητικά $\nu \to \infty$) ισχύει

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}) \quad \text{και} \quad S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim N(\nu\mu, \nu\sigma^2)$$

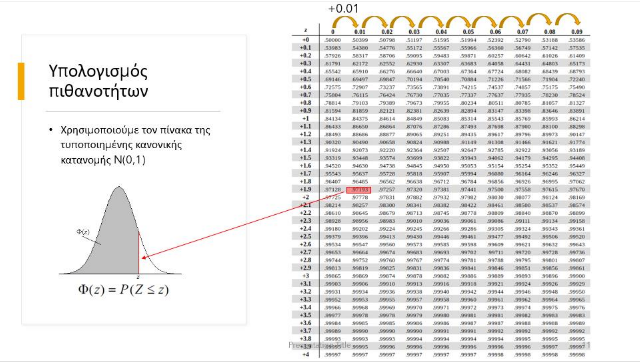
Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ν; Τουλάχιστον 30

23

Παράδειγμα

- Μπορούμε να υπολογίσουμε ποιο ποσοστό (κατά προσέγγιση) των κιβωτίων περιέχει μήλα με μέσο βάρος μεταξύ 200 και 250gr;

$$P(200 < \overline{X} < 250)$$



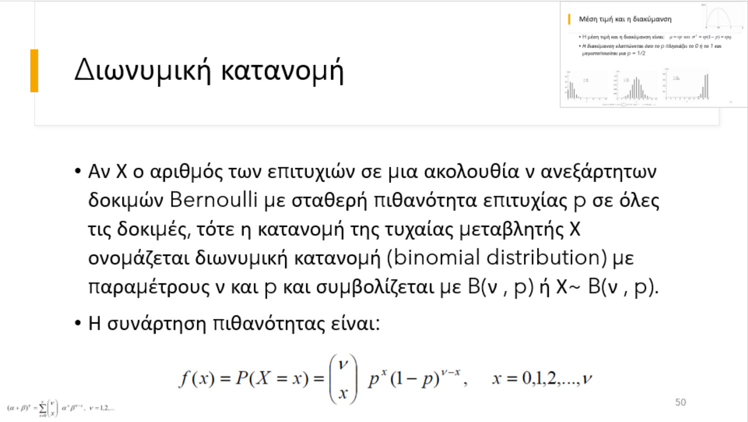
$$P(200 < \overline{X} < 250) = P(\frac{200-220}{\sqrt{106.67}} < Z < \frac{250-220}{\sqrt{106.67}}) = P(-1.94 < Z < 2.90) =$$

$$= \Phi(2.90) - \Phi(-1.94) = \Phi(2.90) - [1 - \Phi(1.94)] = \Phi(2.90) - 1 + \Phi(1.94) = 0.9725$$

Το ποσοστό των κιβωτίων που περιέχουν μήλα με μέσο βάρος μεταξύ 200 και 250gr είναι (κατά προσέγγιση) 97.25%.

Κανονική προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής

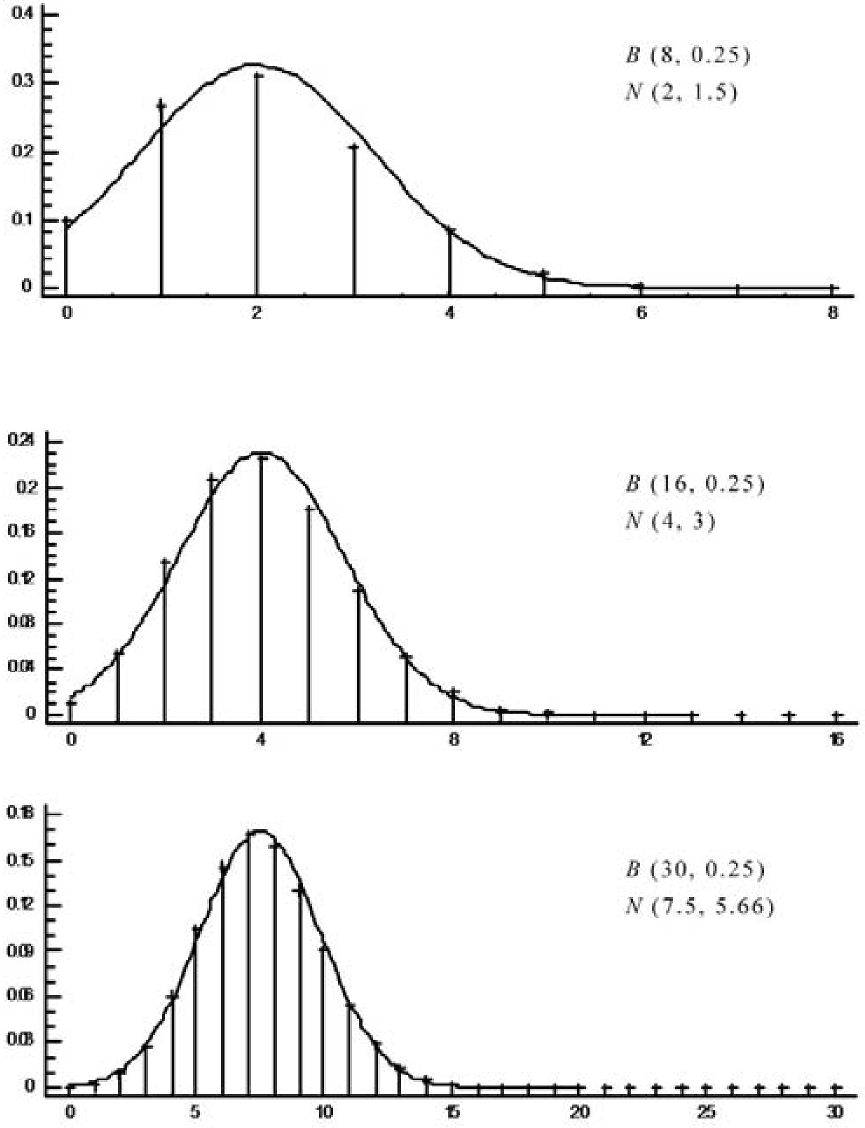
- Για μεγάλα ν (θεωρητικά ν $\rightarrow\infty$), η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγισθεί από μια κανονική κατανομή με ίδια μέση τιμή και ίδια διακύμανση. Δηλαδή, αν Χ ~ Β(ν , p) τότε, για μεγάλες τιμές του ν , η κατανομή της Χ προσεγγίζεται από την $N(\mu, \sigma^2)$ με μ =νp και σ^2 =νp(1 – p) .



Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ν; νp ≥ 5 και ν (1 – p) ≥ 5.

Κανονική προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής

Πόσο καλά την προσεγγίζει;



Παράδειγμα

- Ο επιθυμητός/ιδανικός αριθμός πρωτοετών φοιτητών σε ένα πανεπιστήμιο είναι 150. Το πανεπιστήμιο, γνωρίζοντας από προηγούμενη εμπειρία ότι από τους φοιτητές που κάνει δεκτούς για εγγραφή μόνο το 30% παρακολουθεί τα μαθήματα, κάνει δεκτούς 450 φοιτητές. Ποια είναι η πιθανότητα από τους 450 πρωτοετείς φοιτητές, να παρακολουθούν τελικά τα μαθήματα περισσότεροι από 150.

Παράδειγμα

- Έστω X τμ που μετρά τον αριθμό των πρωτοετών φοιτητών που παρακολουθούν τα μαθήματα
- X ~ B(ν , p) με ν = 450 και p = 0.3
- Ελέγχουμε αν η κανονική κατανομή μπορεί να την προσεγγίσει ικανοποιητικά:

$$\nu p = 450 \cdot 0.3 = 135 \geq 5 \quad \checkmark$$

$$\nu(1-p) = 450 \cdot 0.7 = 315 \geq 5 \quad \checkmark$$

Παράδειγμα

- Κανονική προσέγγιση:

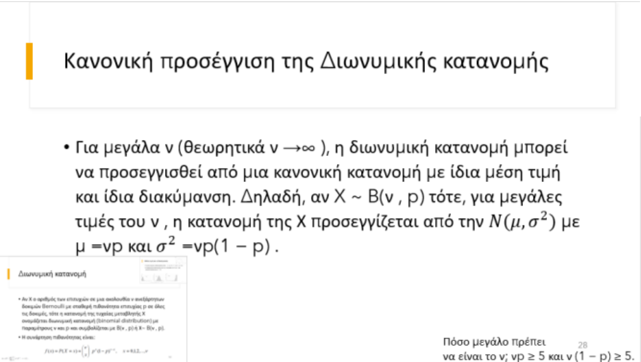
$$\mu = \nu p = 450 \cdot 0.3 = 135$$

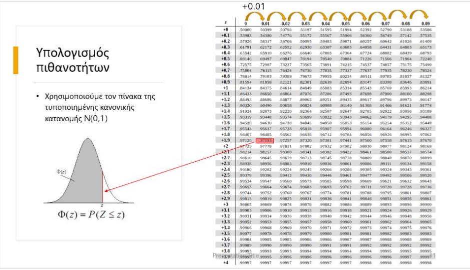
$$\sigma^2 = \nu p(1-p) = 450 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 94.5$$

$$N(135,\ 94.5)$$

- Ζητούμενη πιθανότητα:

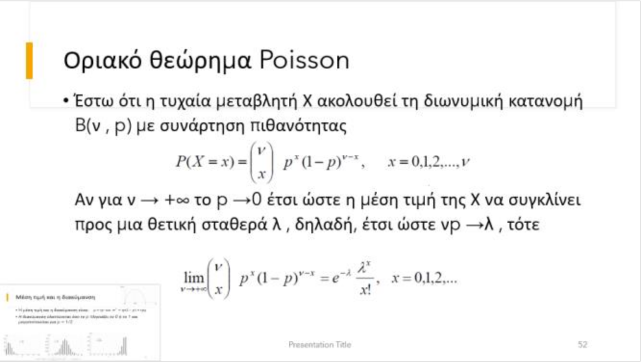
$$P(X \geq 151) = P\left(\frac{X-135}{\sqrt{94.5}} \geq \frac{151-135}{\sqrt{94.5}}\right) = P(Z \geq 1.64) = 1 - \Phi(1.64) = 0.0505$$





Κανονική προσέγγιση της κατανομής Poisson

- Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ,τότε η κατανομή της X προσεγγίζεται, για μεγάλες τιμές του λ (στην πράξη για λ > 10), από την N(μ, σ^2) με μ = λ και σ^2 = λ .



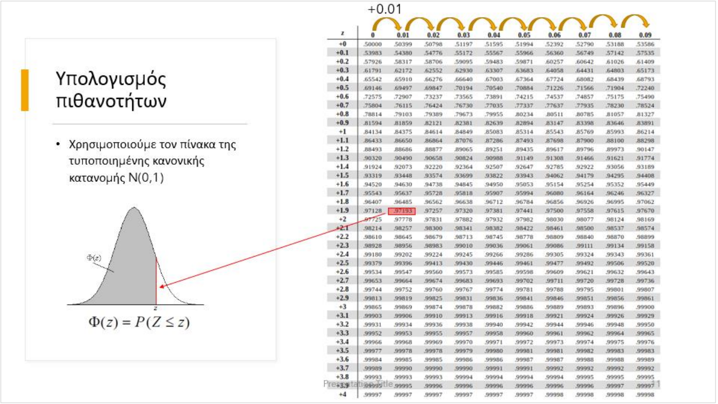
Παράδειγμα

- Σε μια αγροτική καλλιέργεια κηπευτικών, ο αριθμός των φυτών που δεν αναπτύσσονται είναι τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 100$ φυτά/καλλιεργητική περίοδο.
- Ποια είναι η πιθανότητα σε μια καλλιεργητική περίοδο ο αριθμός των φυτών που δε θα αναπτυχθούν να είναι τουλάχιστον 120.

Παράδειγμα

- Επειδή η τιμή του λ είναι μεγάλη (>10), η κατανομή της X προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική με μ = λ = 100 και σ^2 = λ = 100 , δηλαδή, από την N(100, 100)

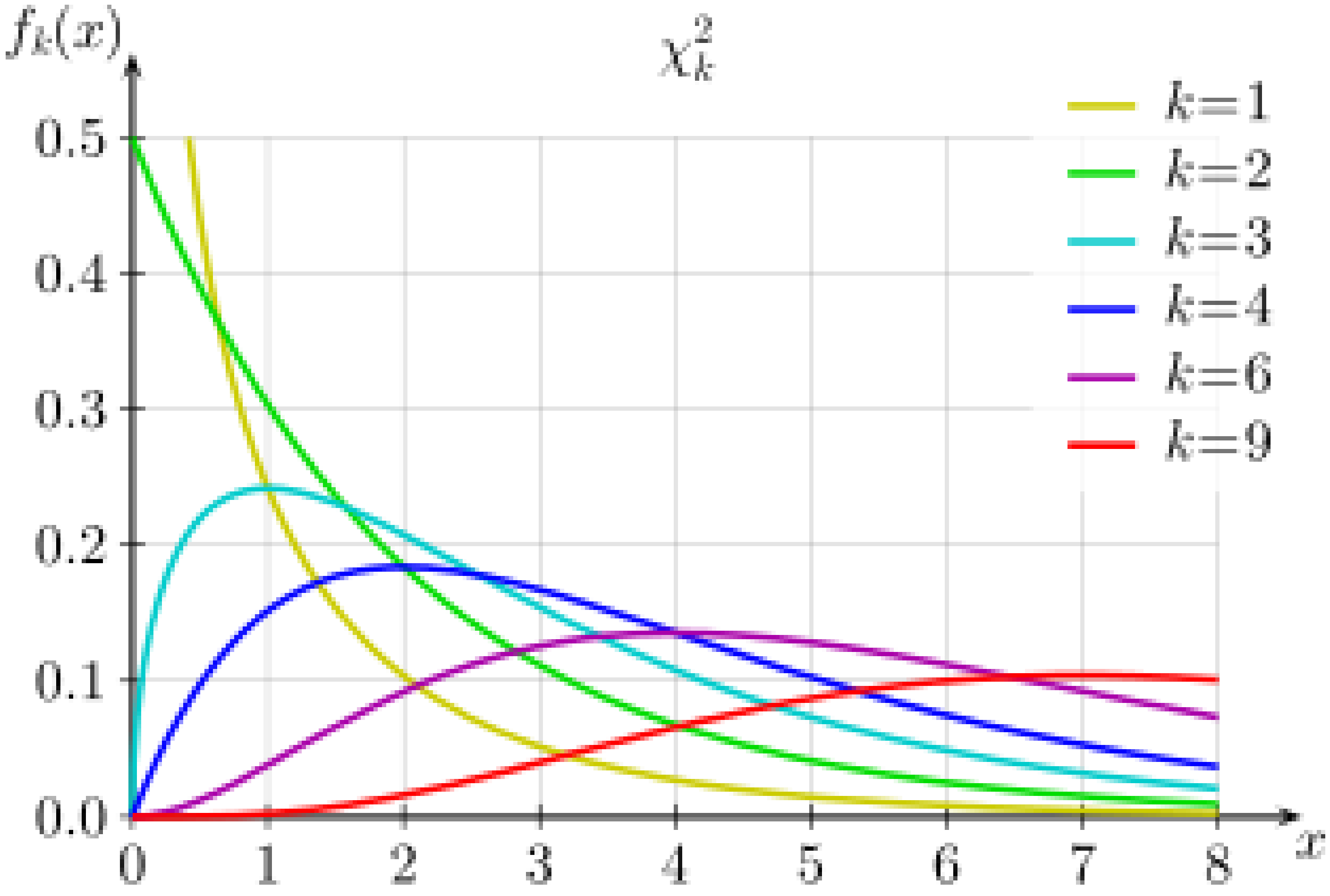
$$P(X \geq 120) = P\left(\frac{X-100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$$



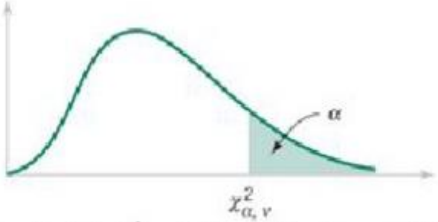
Κατανομή χ^2

- Αν $Z_1, Z_2, Z_{3,} \ldots, Z_\nu$ είναι τυποποιημένες κανονικές μεταβλητές με $Z_i \sim N(0,1)$ τότε η κατανομή της τμ $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_\nu^2$ ακολουθεί την κατανομή χ-τετράγωνο με ν βαθμούς ελευθερίας (chi-square distribution)
- E(X)=ν και Var(X)=2ν

Κατανομή χ^2



$P(X > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$



$P(X \leq \chi^2_{v,\alpha}) = 1 - \alpha$

Percentage Points $\chi^2_{\alpha,v}$ of the Chi-Squared Distribution

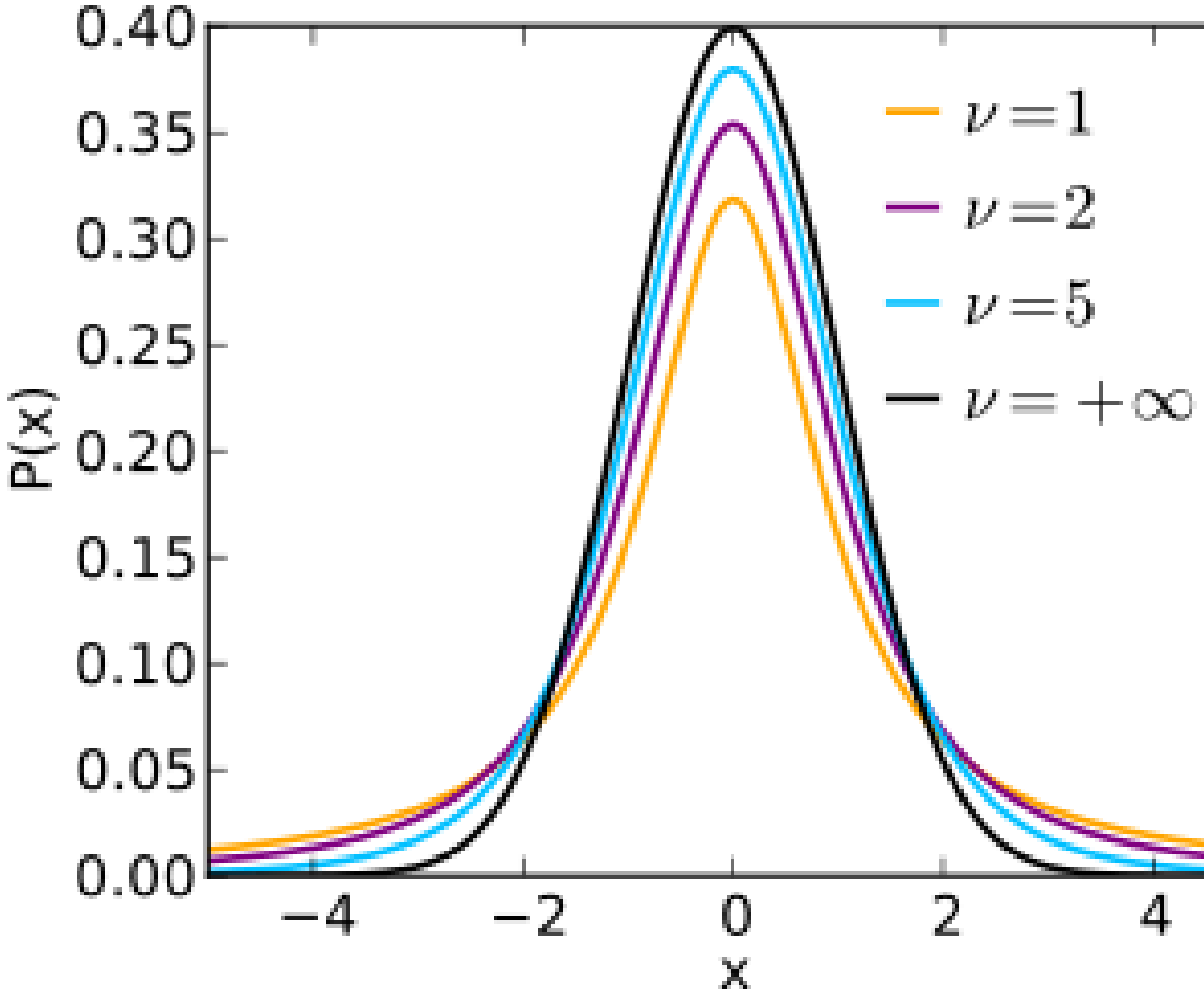
v \ α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.0050
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Κατανομή χ^2

Κατανομή t (student)

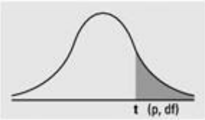
- Έστω Z τμ η οποία ακολουθεί την τυποποιημένη κατανομή (Z~N(0,1)) και S_ν μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την χ-τετράγωνο κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας.
- Η τμ $\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{S_\nu/\nu}}$ ακολουθεί την κατανομή t με ν βαθμούς ελευθερίας (t distribution, student t-distribution) και συμβολίζεται με $T \sim t_\nu$.
- E(T)=0 για ν>0 και Var(T)=ν/(ν-2) για ν>2

Κατανομή t (student)



Κατανομή t (student)

$P(X > t_\nu) = \alpha$



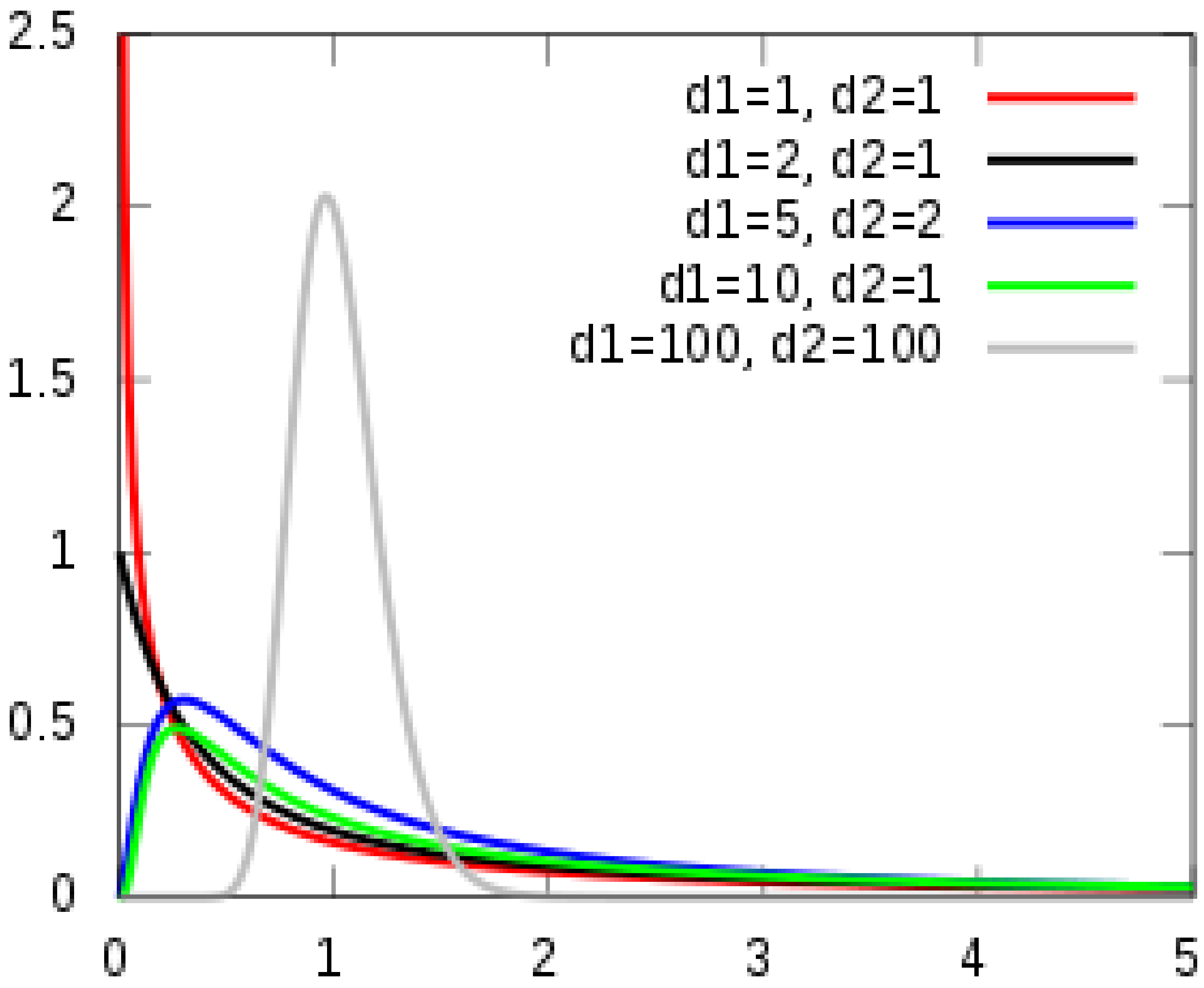
$P(X \leq t_\nu) = 1 - \alpha$

df/p	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	43178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
z	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905
CI	———	———	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%

Κατανομή F

- Έστω S_ν και S_m δύο ανεξάρτητες τμ που ακολουθούν την κατανομή χ-τετράγωνο με ν και m βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα.
- Η τμ $\mathrm{F} = \frac{S_\nu/\nu}{S_m/m} = \frac{m}{n}\frac{S_\nu}{S_m}$ ακολουθεί την κατανομή F με ν και m βαθμούς ελευθερίας (F-distribution, $F_{\nu,m}$)
- $E(F) = \frac{m}{m-2}$ για m>2 και $Var(F) = \frac{2m^2(\nu+m-2)}{\nu(m-2)^2(m-4)}$ για m>4.

Κατανομή F

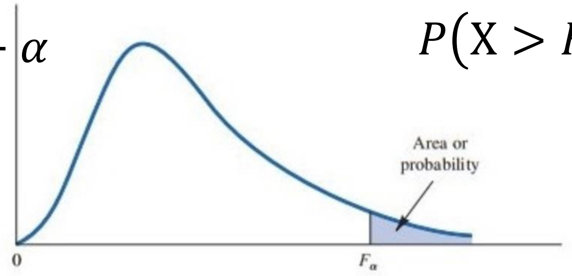


d1=1, d2=1
d1=2, d2=1
d1=5, d2=2
d1=10, d2=1
d1=100, d2=100
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5

Κατανομή F

$P\left(X \leq F_{\nu,\mu;\alpha}\right) = 1 - \alpha$

$P\left(X > F_{\nu,\mu;\alpha}\right) = \alpha$



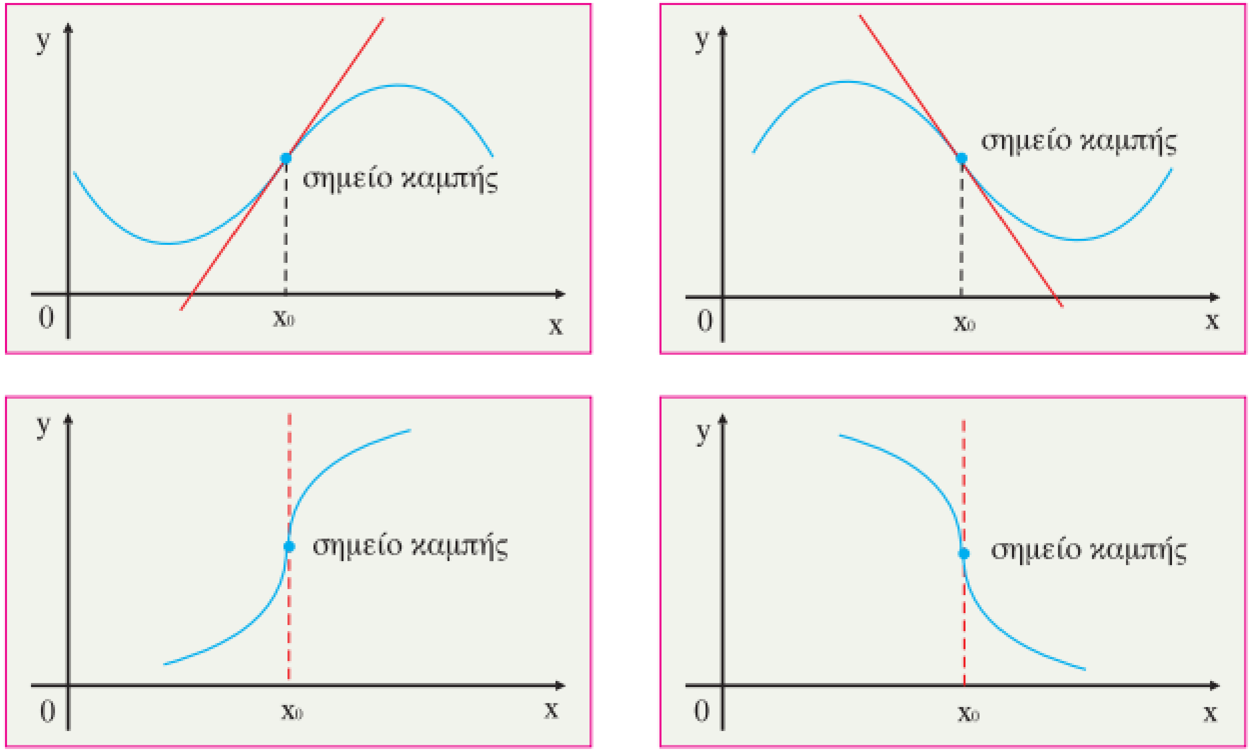
Entries in the table give F_α values, where α is the area or probability in the upper tail of the F distribution. For example, with 4 numerator degrees of freedom, 8 denominator degrees of freedom, and a .05 area in the upper tail, $F_{.05} = 3.84$.

Denominattor Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40	60	100	100
1	.10	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79	63.01	63.30
	.05	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95	248.02	249.26	250.10	251.14	252.20	253.04	254.19
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	984.87	993.08	998.09	1001.40	1005.60	1009.79	1013.16	1017.76
	.01	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6156.97	6208.66	6239.86	6260.35	6286.43	6312.97	6333.92	6362.80
2	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.01	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.96	13.91
	.01	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32	26.24	26.14
4	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.36	8.32	8.26
	.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65	13.58	13.47
5	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.324	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.13	3.11
	.05	6.61.	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43	4.41	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.12	6.08	6.02
	.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20	9.13	9.03

$F_{\nu,\mu;1-\alpha} = 1/F_{\nu,\mu;\alpha}$

Backup

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως και η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της C_f.



http://www.kosmonaftis.gr/gomath/math_clkat2/bibliomath_209-218.pdf

Συνεχής τυχαία μεταβλητή και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

- Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται συνεχής αν υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση

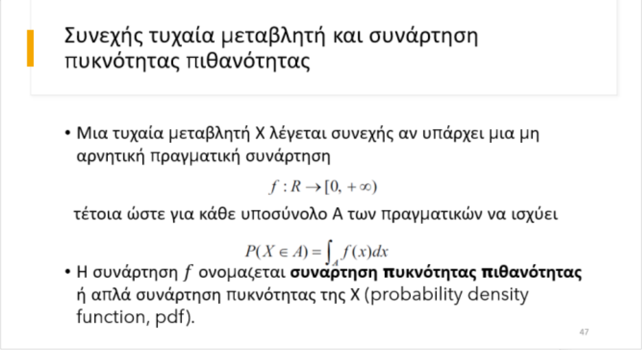
$$f : R \to [0, +\infty)$$

τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο A των πραγματικών να ισχύει

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

- Η συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ή απλά συνάρτηση πυκνότητας της X (probability density function, pdf).

Πιθανότητες ενδεχομένων



Συνεχής τυχαία μεταβλητή και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

- Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται συνεχής αν υπάρχει μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση

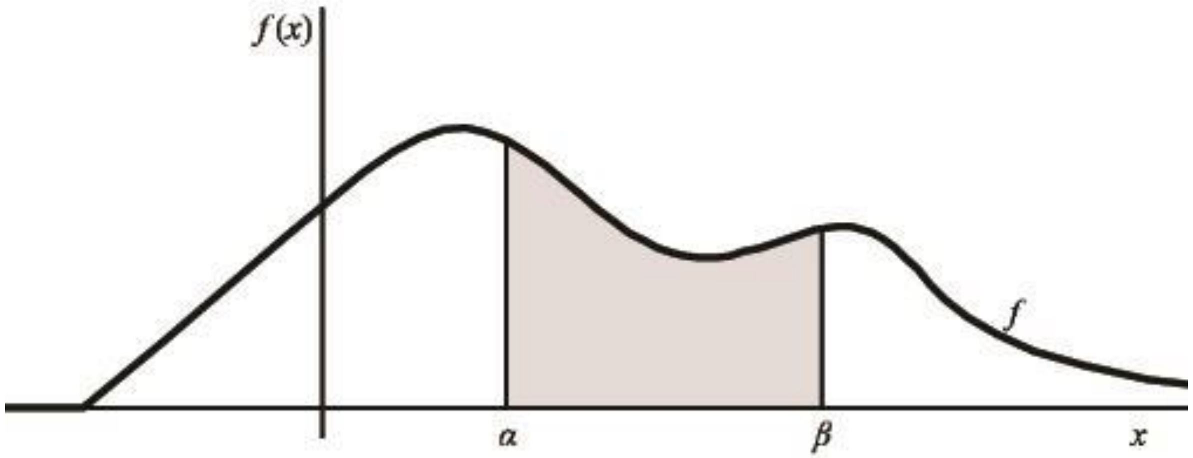
$$f : R \to [0, +\infty)$$

τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο A των πραγματικών να ισχύει

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx$$

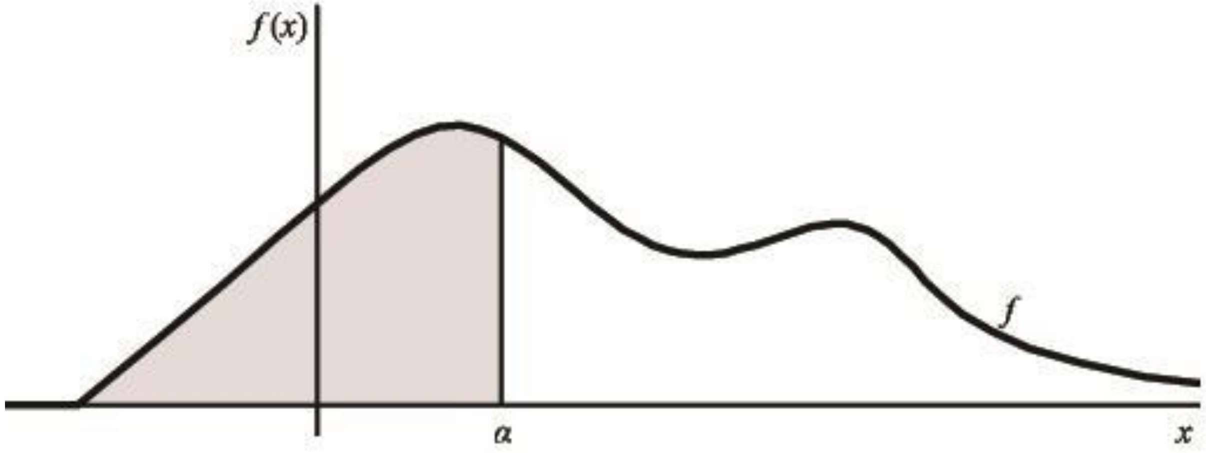
- Η συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ή απλά συνάρτηση πυκνότητας της X (probability density function, pdf).

$X \in [\alpha, \beta]$



$P(\alpha \leq X \leq \beta)$

$X \in (-\infty, \alpha]$



$P(X \leq \alpha)$

Πρόταση

- Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας f, τότε:

$$\alpha)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

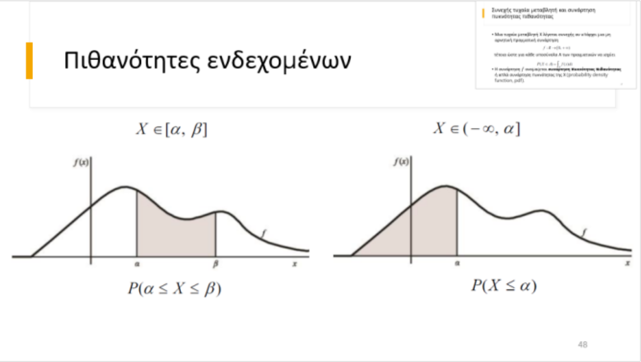
$$\beta)\ F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

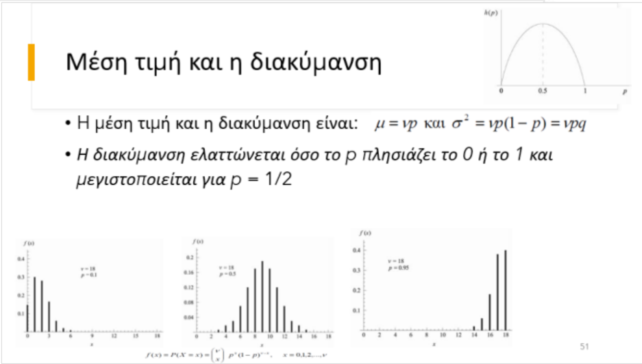
$$\gamma)\ f(x) = F'(x)$$ (στα σημεία συνέχειας της f)

$\delta)$ *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς* α, β *με* $\alpha \le \beta$

$$(i)\ \ P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

$$(ii)\ \ P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$$





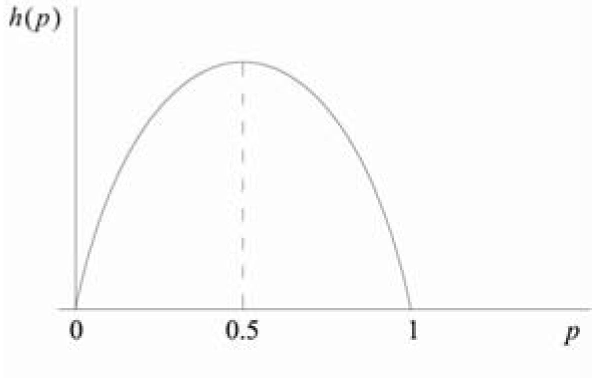
Διωνυμική κατανομή

- Αν X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p σε όλες τις δοκιμές, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται διωνυμική κατανομή (binomial distribution) με παραμέτρους ν και p και συμβολίζεται με B(ν , p) ή X~ B(ν , p).
- Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

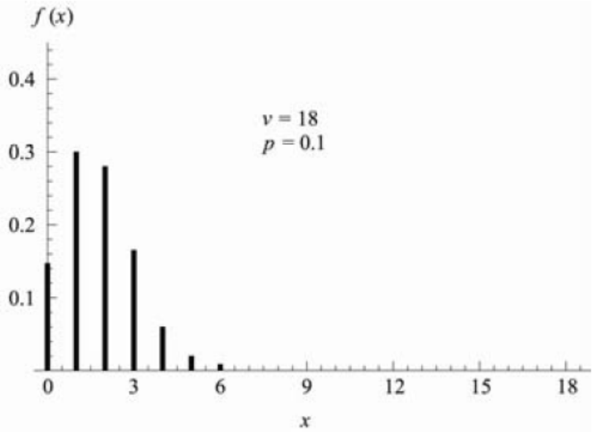
$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,\nu$$

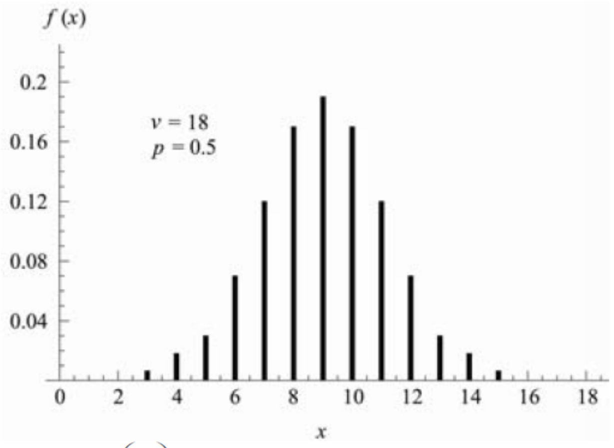
$$(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} \alpha^x \beta^{\nu-x}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

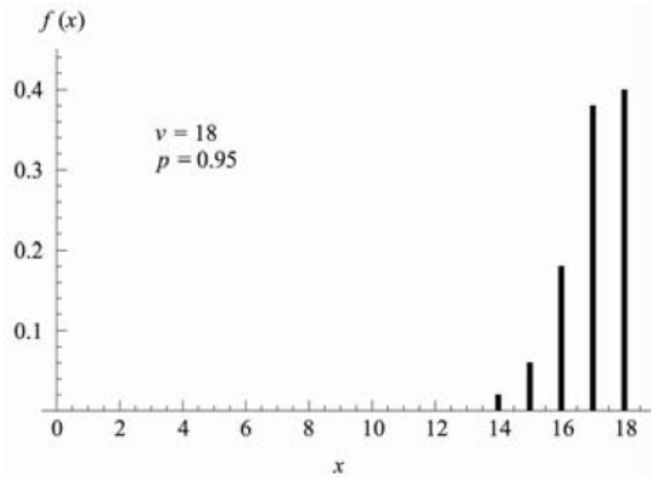
Μέση τιμή και η διακύμανση



- Η μέση τιμή και η διακύμανση είναι: $\mu = \nu p$ και $\sigma^2 = \nu p(1-p) = \nu pq$
- *Η διακύμανση ελαττώνεται όσο το p πλησιάζει το 0 ή το 1 και μεγιστοποιείται για* $p = 1/2$







$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,\nu$$

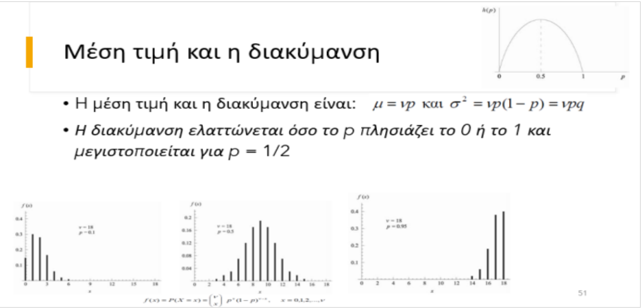
Οριακό θεώρημα Poisson

- Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή B(ν , p) με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X=x)=\binom{\nu}{x}\ p^{x}(1-p)^{\nu-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,\nu$$

Αν για ν → +∞ το p →0 έτσι ώστε η μέση τιμή της X να συγκλίνει προς μια θετική σταθερά λ , δηλαδή, έτσι ώστε νp →λ , τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty}\binom{\nu}{x}\ p^{x}(1-p)^{\nu-x}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$$



Η κατανομή Poisson

- Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

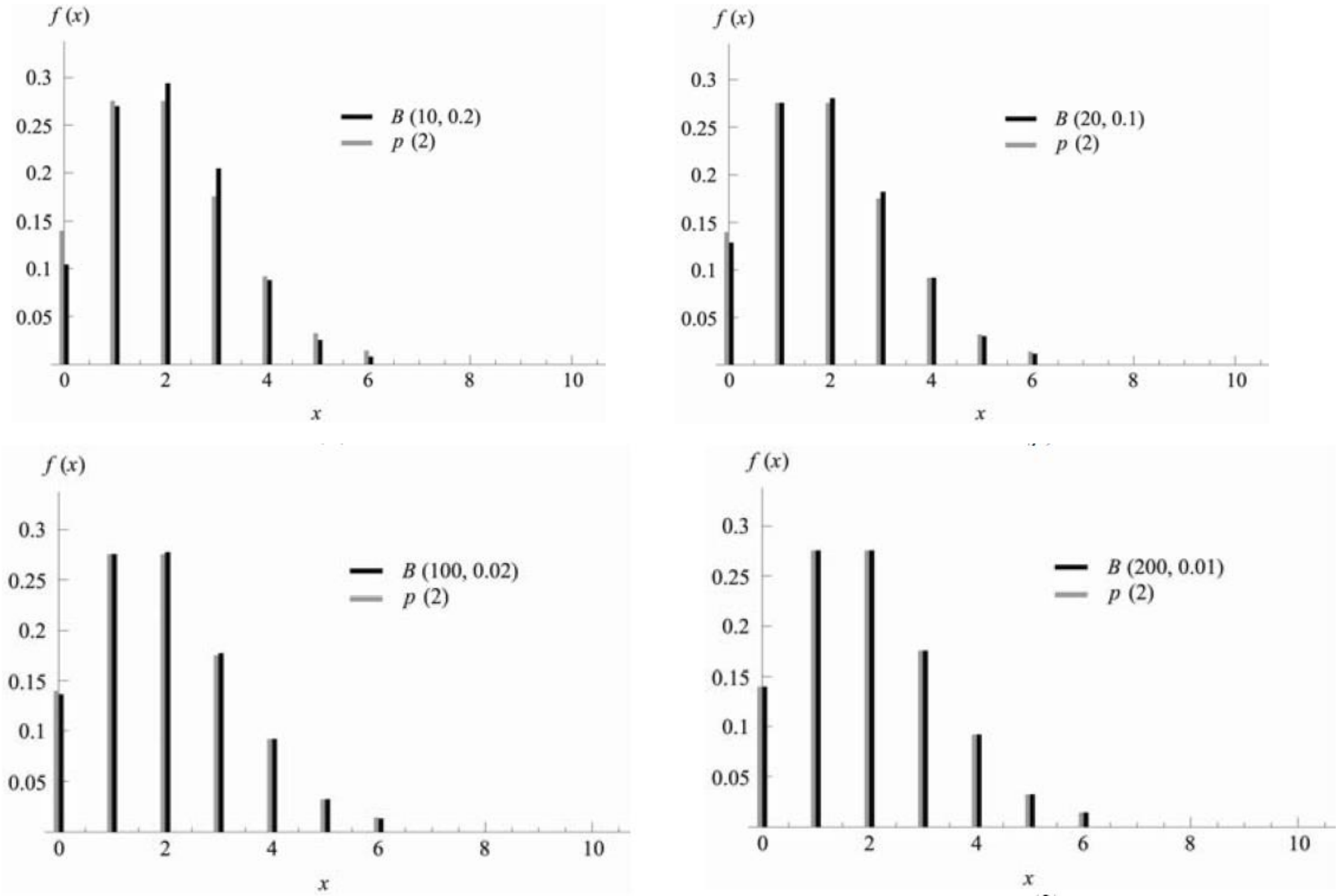
$$f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

όπου λ > 0 . Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται κατανομή Poisson με παράμετρο λ και συμβολίζεται με P(λ).

- Η **διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται από την κατανομή Poisson** αν για ν μεγάλο (θεωρητικά ν →∞), η πιθανότητα επιτυχίας p συγκλίνει στο 0 (δηλ. p →0) έτσι ώστε η μέση τιμή της να συγκλίνει σε μια θετική σταθερά λ (νp →λ).

Σχόλια

- Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ν και πόσο μικρό το p;
- $\nu \geq 20$ και $p \leq 10/\nu$
- $\lambda = \nu p = 2$ όταν $\nu = 10, 20, 100, 200$ καιp $= 0.2,\ 0.1,\ 0.02,\ 0.01$ αντίστοιχα



Μέση τιμή και διακύμανση

- Η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής Poisson με παράμερο λ , αντίστοιχα είναι

$$\mu = E(X) = \lambda$$

και

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda$$