



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης (MBA)

Ενότητα 9: Λύσεις παιχνίμων δύο παικτών

Μπεληγιάννης Γρηγόριος
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Λύσεις παιγνίων δύο παικτών

Υποενότητα 1

Σκοποί 1^{ης} υποενότητας

- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τις βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά των κυριαρχούμενων στρατηγικών
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια της ισορροπίας κατά Nash
- Να μπορούν οι φοιτητές να προσδιορίζουν σημεία ισορροπίας σε ένα παίγνιο
- Να μπορούν οι φοιτητές να επιλύουν συνεχή παίγνια
- Να μπορούν οι φοιτητές να αναγνωρίζουν ισορροπίες με αμιγείς στρατηγικές και να εφαρμόζουν τη στρατηγική MAXIMIN και MINIMAX



Περιεχόμενα 1^{ης} υποενότητας

- Κυριαρχούμενες στρατηγικές
- Ισορροπία κατά Nash
- Προσδιορισμός σημείων ισορροπίας
- Συνεχή παίγνια
- Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές
- Στρατηγική MAXIMIN και MINIMAX



Κυριαρχούμενες στρατηγικές (1/3)

- **Παίγνια Συνεργασίας**
 - Οι δύο παίκτες μπορούν να διαπραγματευθούν μεταξύ τους, να συμφωνήσουν από κοινού σε ορισμένες αποφάσεις και στη συνέχεια να είναι δεσμευμένοι να ακολουθήσουν τις συμφωνημένες αυτές αποφάσεις
- **Παίγνια Μη Συνεργασίας**
 - Χωρίς δεσμεύσεις



Κυριαρχούμενες στρατηγικές (2/3)

- **Πεπερασμένα Παίγνια (Διακριτά Παίγνια)**
 - Οι παίκτες έχουν πεπερασμένα σύνολα στρατηγικών
- **Συνεχή Παίγνια**
 - Οι στρατηγικές ανήκουν σε συνεχές σύνολο, π.χ. $[0, 1]$



Κυριαρχούμενες στρατηγικές (3/3)

- Μια στρατηγική σ του I κυριαρχείται αυστηρά από μία άλλη στρατηγική του σ' αν για κάθε στρατηγική τ του II ισχύει η ανισότητα $K_I(\sigma, \tau) < K_I(\sigma', \tau)$
- Μια στρατηγική σ του I κυριαρχείται (όχι αυστηρά) από μία άλλη στρατηγική του σ' αν για κάθε στρατηγική τ του II ισχύει η ανισότητα $K_I(\sigma, \tau) \leq K_I(\sigma', \tau)$



1^ο παράδειγμα (1/4)

- Θεωρούμε δύο παραγωγούς του ίδιου αγαθού, ο καθένας των οποίων μπορεί να παραγάγει είτε 1 είτε 5 μονάδες του αγαθού, χωρίς κόστος



1^ο παράδειγμα (2/4)

- Η συνάρτηση ζήτησης του αγαθού, που προσδιορίζει την τιμή που θα ισχύσει σαν συνάρτηση της συνολικής παραγωγής, έστω ότι είναι η εξής:

Συνολική Παραγωγή	Τιμή
2 (1+1)	8
6 (1+5) ή (5+1)	2
10 (5+5)	0,6



1^ο παράδειγμα (3/4)

- Ο I έχει δύο στρατηγικές (όσες και επιλογές), έστω σ_1, σ_2 που αντιστοιχούν σε παραγωγή 1 και 5 μονάδων
- Συμμετρικά ο II έχει τις στρατηγικές τ_1, τ_2



1^ο παράδειγμα (4/4)

- Η κανονική μορφή του παιχνιδιού είναι η εξής:

I \ II	τ_1	τ_2
σ_1	(8,8)	(2,10)
σ_2	(10,2)	(3,3)



2^ο παράδειγμα (1/2)

I \ II	τ_1	τ_2
σ_1	0	4
σ_2	3	2



2^ο παράδειγμα (2/2)

- **Λύση Κυριαρχίας**
 - Η περίπτωση όπου όλες οι στρατηγικές των παικτών κυριαρχούνται από μία στρατηγική (για κάθε παίκτη)
- **Λύση (αυστηρά) ακολουθιακής κυριαρχίας**
 - Προέρχεται από διαδοχική απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών



3^ο παράδειγμα (1/5)

- Στο Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο ο Ιαπωνικός στόλος βρισκόταν δυτικά της Ν. Γουινέας με πορεία προς τα ανατολικά
- Μπορούσε να περάσει είτε από βόρεια είτε από νότια του νησιού
- Το βόρειο ταξίδι διαρκούσε 2 ημέρες ενώ το νότιο 3



3^ο παράδειγμα (2/5)

- Στην Ν. Γουινέα υπήρχαν βάσεις Αμερικανικών βομβαρδιστικών που ήξεραν ότι ο Ιαπωνικός στόλος θα παράπλεε το νησί
- Αν τα βομβαρδιστικά συγκέντρωναν τις προσπάθειες εντοπισμού προς τα βόρεια (νότια) και ο στόλος είχε πάει προς τα νότια (βόρεια), θα χανόταν μία ημέρα στην άκαρπη προσπάθεια εντοπισμού του στόλου, διαφορετικά ο στόλος θα εντοπιζόταν αυθημερόν



3^ο παράδειγμα (3/5)

- Οι επιλογές του Ιάπωνα Ναυάρχου είναι Βόρεια ή Νότια και του Αμερικανού διοικητή επίσης Βόρεια ή Νότια
- Αναλύστε το παίγνιο με έννοιες ακολουθιακής κυριαρχίας



3^ο παράδειγμα (4/5)

- Το πόσες ημέρες θα βομβαρδιζόταν ο στόλος δίνεται στον παρακάτω πίνακα ως συνάρτηση των επιλογών των δύο παικτών (παίγνιο Π_0):

ΗΠΑ \ Ιαπωνία	Βόρεια	Νότια
Βόρεια	2	2
Νότια	1	3

- Για την Ιαπωνία η **Βόρεια** Στρατηγική «κυριαρχεί» της Νότιας (αν και όχι αυστηρά)



3^ο παράδειγμα (5/5)

ΗΠΑ \ Ιαπωνία	Βόρεια
Βόρεια	2
Νότια	1

- παίγνιο Π_1 : Η **Βόρεια** στρατηγική των ΗΠΑ κυριαρχεί (όχι αυστηρά)
- παίγνιο Π_2 : Η ακολουθιακή λύση του παιχνιδιού είναι η **Βόρεια, Βόρεια**



4^ο παράδειγμα (1/4)

- Έστω το παρακάτω παίγνιο δύο παικτών:

I \ II	1	2
1	(3,2)	(2,2)
2	(1,1)	(0,0)
3	(0,0)	(1,1)



4^ο παράδειγμα (2/4)

- Η στρατηγική 2 του παίκτη I κυριαρχείται από την 1 οπότε την αφαιρούμε:

I \ II		II	
		1	2
I	1	(3,2)	(2,2)
	3	(0,0)	(1,1)



4^ο παράδειγμα (3/4)

- Τώρα η στρατηγική 1 του II κυριαρχείται οπότε:

		II	
		1	2
I	1	(2,2)	
	3	(1,1)	

- Άρα η λύση της ακολουθιακής κυριαρχίας είναι η στρατηγική 1 (για τον I) και 2 (για τον II)



4^ο παράδειγμα (4/4)

- Αν στο 1^ο βήμα είχε απαλειφθεί η στρατηγική 3 του παίκτη I;
- Αν στο 1^ο βήμα είχαν απαλειφθεί τόσο η στρατηγική 2 όσο και η στρατηγική 3 του παίκτη I;



Ισορροπία κατά Nash

- Σημείο ή ζεύγος ισορροπίας (κατά Nash)
 - $K_I(\sigma_I, \tau_K) \geq K_I(\sigma, \tau_K)$ για κάθε $\sigma \in \Sigma$
 - $K_{II}(\sigma_I, \tau_K) \geq K_{II}(\sigma_I, \tau)$ για κάθε $\tau \in T$
- Σε ένα παίγνιο μπορεί να υπάρχει ένα, πολλά ή και κανένα σημείο ισορροπίας



5^ο παράδειγμα (1/2)

- Δύο εταιρείες εξετάζουν την κάθοδο σε δύο διαφορετικές αγορές A, B. Αν και οι δύο κατέλθουν στην ίδια αγορά, τα κέρδη θα είναι αμελητέα και για τις δύο λόγω του ανταγωνισμού
- Αν όμως κατέλθουν σε διαφορετικές αγορές δε θα υπάρξει ανταγωνισμός και επομένως θα είναι και οι δύο κερδοφόρες
- Δεχόμαστε ότι η αγορά A είναι πιο προσοδοφόρα από τη B



5^ο παράδειγμα (2/2)

- Δεχόμαστε ότι η αγορά A είναι πιο προσοδοφόρα από τη B

I \ II	A	B
A	(0,0)	(2,1)
B	(1,2)	(0,0)



Προσδιορισμός σημείων ισορροπίας

- Για κάθε στρατηγική του I υπογραμμίζουμε στον πίνακα του παιγνίου την αντίδραση (βέλτιστη επιλογή) του II, με την παραδοχή ότι ο II γνωρίζει τη στρατηγική που επέλεξε ο I
- Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για κάθε στρατηγική και του άλλου παίκτη II
- Τα στοιχεία που έχουν δύο υπογραμμίσεις είναι σημεία ισορροπίας



6^ο παράδειγμα

- Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας στο παρακάτω παίγνιο;

I \ II	A	B	Γ
A	(4,2)	(7,2)	(3,6)
B	(5,4)	(2,4)	(7,6)
Γ	(6,3)	(2,5)	(5,2)

- Υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές;



7^ο παράδειγμα

- Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας στο παρακάτω παίγνιο;

I \ II	A	B	Γ
A	(0,2)	(2,2)	(0,2)
B	(1,3)	(2,0)	(3,1)
Γ	(3,1)	(2,0)	(1,3)

- Υπάρχουν κυριαρχούμενες στρατηγικές;



Συνεχή παίγνια

- Συνθήκες ισορροπίας
 - Το $K_I(x^*, y^*)$ είναι μέγιστο ως προς x με y^* σταθερό και άρα $\partial K_I / \partial x = 0$ στο σημείο x^*, y^*
 - Το $K_{II}(x^*, y^*)$ είναι μέγιστο ως προς y με x^* σταθερό και άρα $\partial K_{II} / \partial y = 0$ στο σημείο x^*, y^*



8^ο παράδειγμα

- Παραγωγή των συναρτήσεων $K_I(x,y)$ και $K_{II}(x,y)$ και εξίσωσή τους με το 0
- Επίλυση ως προς x και y για να βρεθούν οι αντιδράσεις κάθε παίκτη
- Επίλυση του συστήματος και εύρεση των x^* και y^* (σημείο ισορροπίας)



Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές (1/5)

- $a_{i,j}$: το κέρδος του παίκτη I αν ακολουθήσει το ζεύγος στρατηγικών i,j
- Αντίστοιχα $c-a_{i,j}$ είναι το κέρδος του παίκτη II, αφού το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος



Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές (2/5)

- Για να ικανοποιεί ένα ζεύγος στρατηγικών i^* , j^* τις συνθήκες ισορροπίας Nash θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:
 - $a_{i^*,j^*} \geq a_{i,j^*}$ για κάθε i και
 - $c - a_{i^*,j^*} \geq c - a_{i^*,j}$ για κάθε $j \Rightarrow a_{i^*,j^*} \leq a_{i^*,j}$ για κάθε j
- Συνοψίζοντας:
 - $a_{i,j^*} \leq a_{i^*,j^*} \leq a_{i^*,j}$ για κάθε i, j



Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές (3/5)

- Το σημείο ισορροπίας ονομάζεται και **σημείο minimax** ή σαγματικό σημείο
- Η ορολογία οφείλεται στο ότι το $a_{i^*j^*}$, είναι ελάχιστο ως προς τα στοιχεία της γραμμής i^* και μέγιστο ως προς τα στοιχεία της στήλης j^*



Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές (4/5)

- Διαδικασία
 - Για κάθε γραμμή του πίνακα A υπογραμμίζουμε το στοιχείο που είναι το ελάχιστο της αντίστοιχης γραμμής
 - Για κάθε στήλη του πίνακα A σημειώνουμε με άνω παύλα το μέγιστο στοιχείο της αντίστοιχης στήλης
 - Τα στοιχεία που έχουν και υπογράμμιση και άνω παύλα είναι σημεία ισορροπίας



Ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές (5/5)

- Η εξασφαλισμένη έκβαση v_I για τον παίκτη I ορίζεται ως:
 - $v_I = \max_i \{ \min_j a_{ij} \}$
- Η εξασφαλισμένη έκβαση v_{II} για τον παίκτη II ορίζεται ως:
 - $v_{II} = \min_j \{ \max_i a_{ij} \}$



Αμιγής στρατηγική

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B	
	B_1	B_2
A_1	8	-4
A_2	6	5

- Ο A ενδιαφέρεται για το μέγιστο δυνατό κέρδος και ο B για την ελάχιστη δυνατή ζημιά
- Ποιες είναι οι βέλτιστες στρατηγικές των A και B;
- Ποια είναι η τιμή του παγνίου V ;



Στρατηγική MAXIMIN και MINIMAX

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B		Ελάχιστο σειράς
	B ₁	B ₂	
A ₁	8	-4	-4
A ₂	6	5	5*
Μέγιστο στήλης	8	5*	V=5

- Ο A θέλει το μέγιστο των ελάχιστων (maximin)
- Ο B θέλει το ελάχιστο των μέγιστων (minimax)



Χωρίς σημείο ισορροπίας

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B			Ελάχιστο σειράς
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	6	2	4	2
A ₂	4	9	8	4*
Μέγιστο στήλης	6*	9	8	4≠6



Δύο σημεία ισορροπίας

Στρατηγικές A	Στρατηγικές B			Ελάχιστο σειράς
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	2	6	2	2*
A ₂	-2	1	0	-2
A ₃	1	3	-4	-4
Μέγιστο στήλης	2*	6	2*	V=2



Τέλος Υποενότητας 1

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης (MBA). Λύσεις παιχνίτων δύο παικτών». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT148>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

