



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης (MBA)

Ενότητα 1: Δικτυωτή Ανάλυση (Θεωρία Γράφων)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Δικτυωτή Ανάλυση (Θεωρία Γράφων)

Υποενότητα 1

Σκοποί 1^{ης} υποενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές τα βασικά συστατικά στοιχεία γράφων
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές τη βασική ορολογία γράφων
- Να μάθουν οι φοιτητές την έννοια της συνεκτικότητας σε γράφους
- Να μπορούν οι φοιτητές να αναπαριστούν γραφήματα με τους δύο δυνατούς τρόπους αναπαράστασης



Περιεχόμενα 1^{ης} υποενότητας

- Βασικά συστατικά στοιχεία γράφων
- Ορολογία γράφων
- Συνεκτικότητα
- Αναπαράσταση γραφημάτων



Βασικές εφαρμογές (1/3)

- **Shortest Path** (συντομότερη διαδρομή)
 - Εύρεση της καλύτερης διαδρομής, με βάση την απόσταση, από μία προέλευση προς έναν ή περισσότερους προορισμούς



Βασικές εφαρμογές (2/3)

- **Minimum Spanning Tree** (ελάχιστο ζευγνύον δέντρο)
 - Εντοπισμός εκείνων των συνδέσεων, που μπορούν να καταστήσουν δυνατή την επικοινωνία μεταξύ ενός συνόλου σημείων με το ελάχιστο συνολικό μήκος γραμμών επικοινωνίας



Βασικές εφαρμογές (3/3)

- **Maximum Flow** (μέγιστη ροή)
 - Μεγιστοποίηση της ροής ενός υλικού από μία προέλευση σε ένα προορισμό ενός δικτύου



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Δικτύων (Γράφων)

- **Κόμβοι**
- **Ακμές**
- **Παραδείγματα δικτύων**
 - Αυτοκινητοδρόμων
 - Υδροδότησης
 - Τηλεπικοινωνιών
 - Ηλεκτρονικών Υπολογιστών



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (1/6)

- Ένα γράφημα $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος το οποίο αποτελείται από το σύνολο των κορυφών (vertices) ή κόμβων (nodes) \mathbf{V} και από το σύνολο των ακμών (edges) \mathbf{E}



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (2/6)

- Οι ακμές ενός γραφήματος μπορεί να είναι κατευθυνόμενες, οπότε το γράφημα ονομάζεται **κατευθυντικό** (directed graph, ή digraph) ή μη κατευθυνόμενες, οπότε το γράφημα ονομάζεται **μη κατευθυντικό** (undirected graph)



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (3/6)

- Παράδειγμα
 - ένα δίκτυο υπολογιστών μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα, όπου οι κορυφές αναπαριστούν υπολογιστές και άλλες ενεργές συσκευές, και οι ακμές τις δικτυακές συνδέσεις



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (4/6)

- **Συμβολισμοί**
 - Κόμβοι: με αριθμούς ή γράμματα
 - Ακμές: με τους αριθμούς ή τα γράμματα των κόμβων που συνδέουν
 - Μήκος (κόστος) ακμής: ένας αριθμός που βρίσκεται πάνω από την ακμή



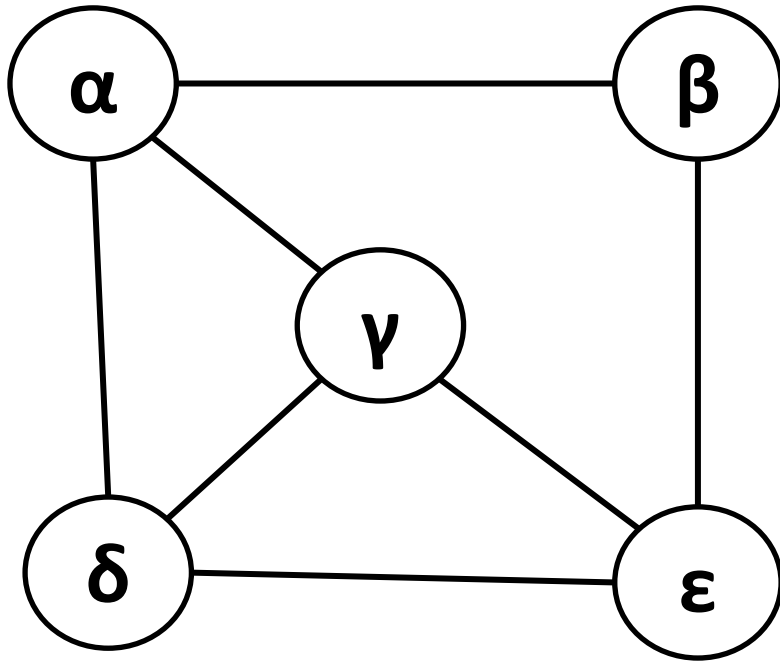
Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (5/6)

- Ένας **γράφος** $G = (V, E)$ αποτελείται από:
 - V : ένα σύνολο **κόμβων**
 - E : ένα σύνολο **ακμών** που συνδέουν τους **κόμβους του V**
- Μία **ακμή** $e = (u, v)$ είναι ένα ζευγάρι από **κόμβους**



Βασικά Συστατικά Στοιχεία Γράφων (6/6)

- Παράδειγμα:



$$V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$$

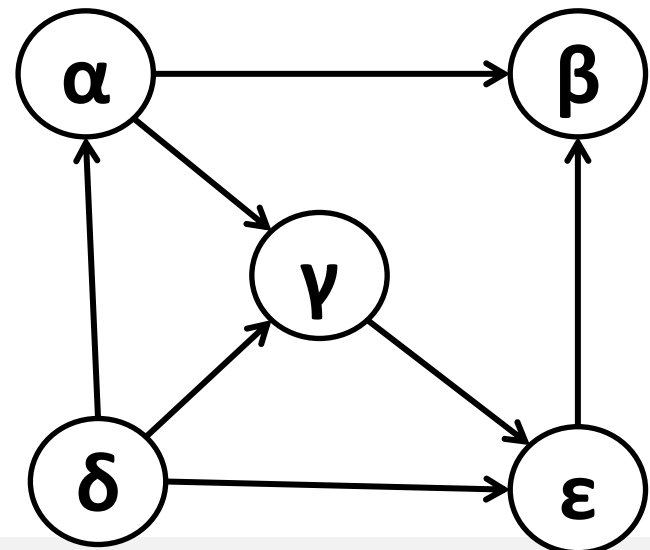
$$E = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \epsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \epsilon), (\delta, \epsilon)\}$$



Ορολογία Γράφων (1/9)

- **Κατευθυντικά Γραφήματα**

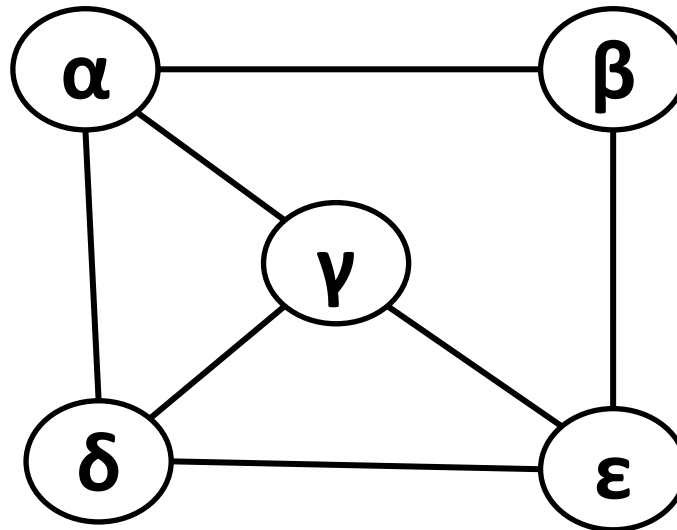
- αν v, w είναι δύο κορυφές ενός κατευθυντικού γραφήματος, η ακμή (v, w) είναι διαφορετική από την ακμή (w, v) .
- Οι ακμές ενός κατευθυντικού γραφήματος αναπαριστώνται με βέλη



Ορολογία Γράφων (2/9)

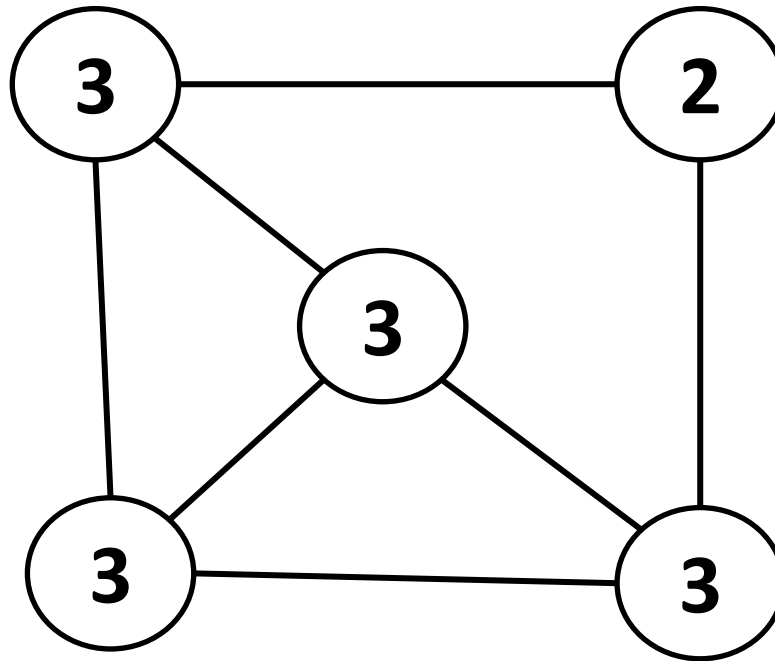
- **Μη Κατευθυντικά Γραφήματα**

- Στην περίπτωση ενός μη κατευθυντικού γραφήματος, η ακμή $\{v, w\}$ είναι ίδια με την ακμή $\{w, v\}$, γεγονός που υποδηλώνεται συμβολίζοντας τις ακμές με απλές γραμμές



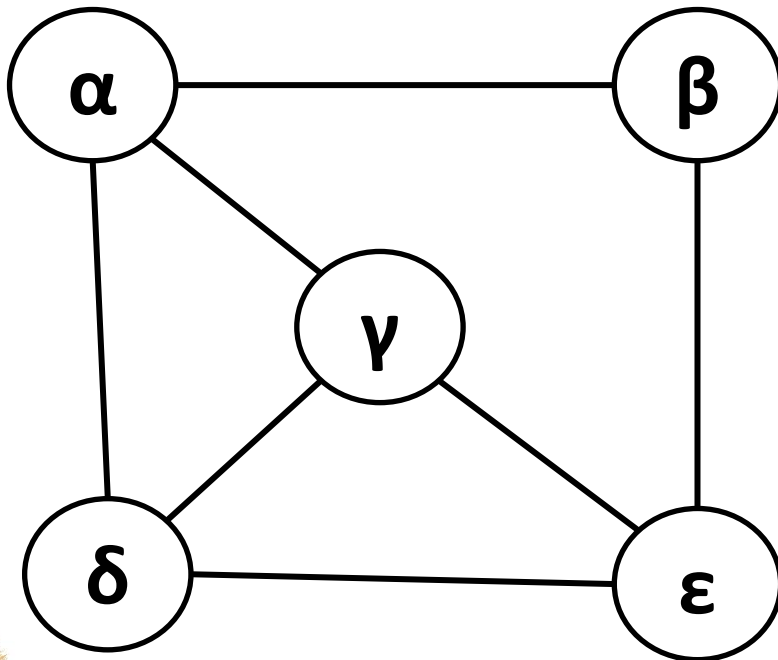
Ορολογία Γράφων (3/9)

- **Γειτονικοί κόμβοι:** συνδέονται από μία ακμή
- **Βαθμός (ενός κόμβου):** ο αριθμός των γειτονικών κόμβων



Ορολογία Γράφων (4/9)

- **Μονοπάτι:** μια ακολουθία των κόμβων v_1, v_2, \dots, v_k τέτοια ώστε κάθε συνεχόμενοι κόμβοι v_i και v_{i+1} να είναι γειτονικοί

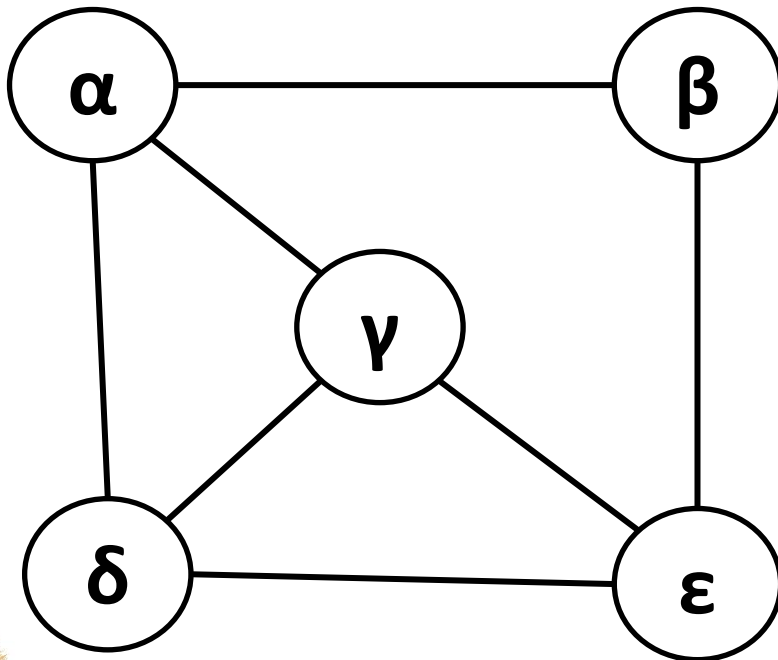


$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \epsilon \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow \epsilon$



Ορολογία Γράφων (5/9)

- **Απλό μονοπάτι:** δεν περιέχει επαναλαμβανόμενους κόμβους

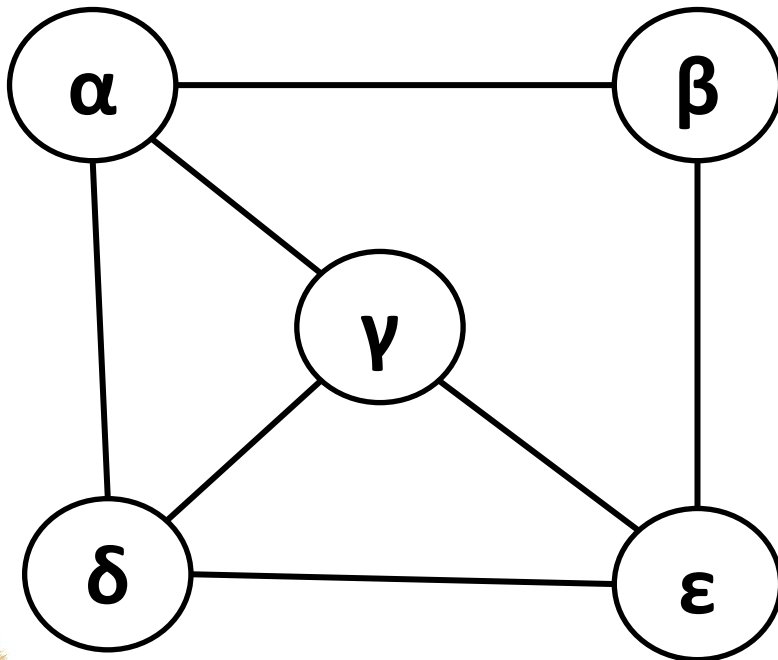


$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \epsilon \rightarrow \delta \rightarrow \gamma$



Ορολογία Γράφων (6/9)

- **Κύκλος:** απλό μονοπάτι, με τη διαφορά ότι ο 1^{ος} και ο τελευταίος του κόμβος είναι ο ίδιος

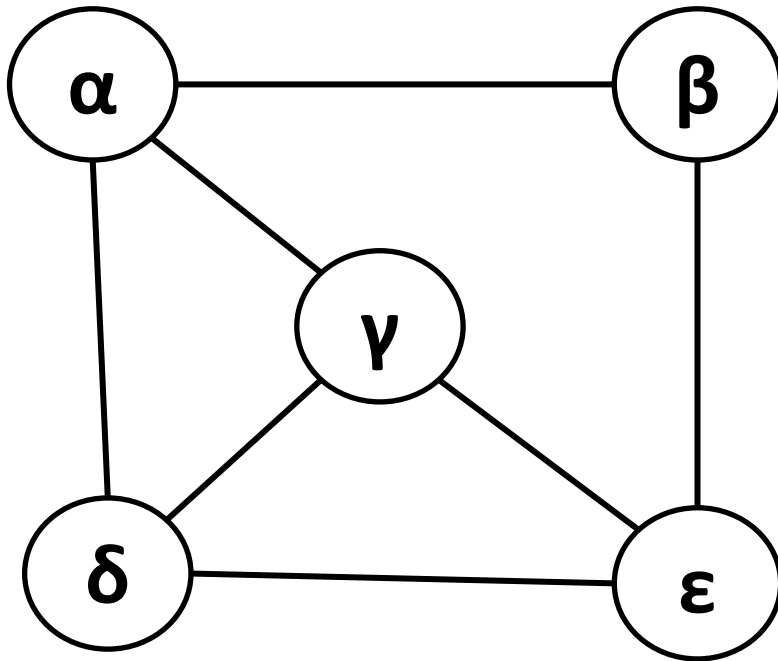


$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \epsilon \rightarrow \delta \rightarrow \alpha$

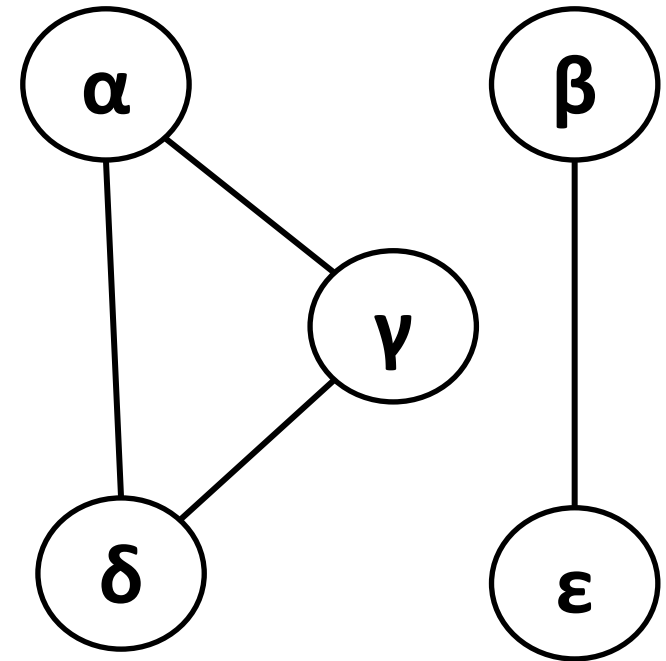


Ορολογία Γράφων (7/9)

- **Συνεκτικός γράφος:** οποιοιδήποτε δύο κόμβοι συνδέονται με κάποιο μονοπάτι



ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΣ

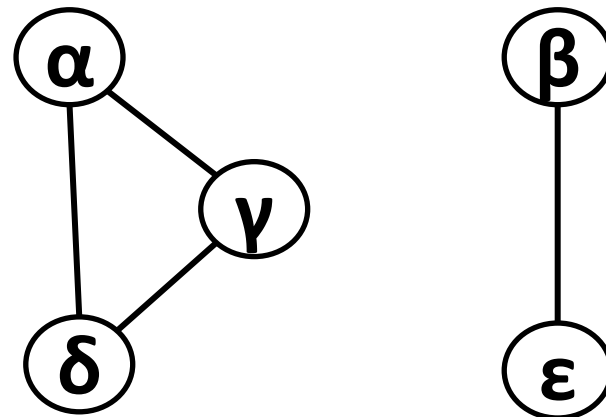


Μη συνεκτικός



Ορολογία Γράφων (8/9)

- **Υπογράφος:** υποσύνολο των κόμβων και των ακμών του γράφου
- **Συνεκτικό συστατικό (κομμάτι):** συνεκτικός υπογράφος
 - π.χ. Ο παρακάτω γράφος περιλαμβάνει δύο συνεκτικά συστατικά



Ορολογία Γράφων (9/9)

- **Δένδρο**
 - συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους
- **Δάσος**
 - συλλογή από δένδρα



ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ (1/2)

- Έστω n = αριθμός κόμβων
- m = αριθμός ακμών
- **Πλήρης γράφος** – όλα τα ζευγάρια κόμβων συνδέονται με κάποια ακμή



ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ (2/2)

- Άρα, εάν ένας γράφος δεν είναι πλήρης ισχύει ότι $m < n(n-1)/2$
- Για ένα δένδρο ισχύει ότι $m = n - 1$
- Εάν $m < n - 1$, ο γράφος G δεν είναι συνεκτικός



Ζευγνύον Δέντρο (Spanning Tree) (1/2)

- Ένα **Ζευγνύον Δέντρο** ενός γράφου **G** είναι ένας υπογράφος ο οποίος
 - είναι ένα δένδρο
 - άρα είναι συνεκτικός γράφος και ισχύει $m = n - 1$
 - περιέχει όλους τους κόμβους του **G**



Ζευγνύον Δέντρο (Spanning Tree) (2/2)

- Το «κόψιμο» μιας ακμής καταργεί τη συνεκτικότητα του γράφου!!
- Σε ένα κύκλο «επιτρέπεται» το «κόψιμο» μιας ακμής
- Παραδείγματα: τηλεφωνικές γραμμές, δίκτυα υπολογιστών, δίκτυα ύδρευσης



Αναπαράσταση Γραφημάτων

- Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι αναπαράστασης ενός γραφήματος είναι μέσω της λίστας γειτονικότητας (adjacency list) και μέσω του πίνακα γειτονικότητας (adjacency matrix)



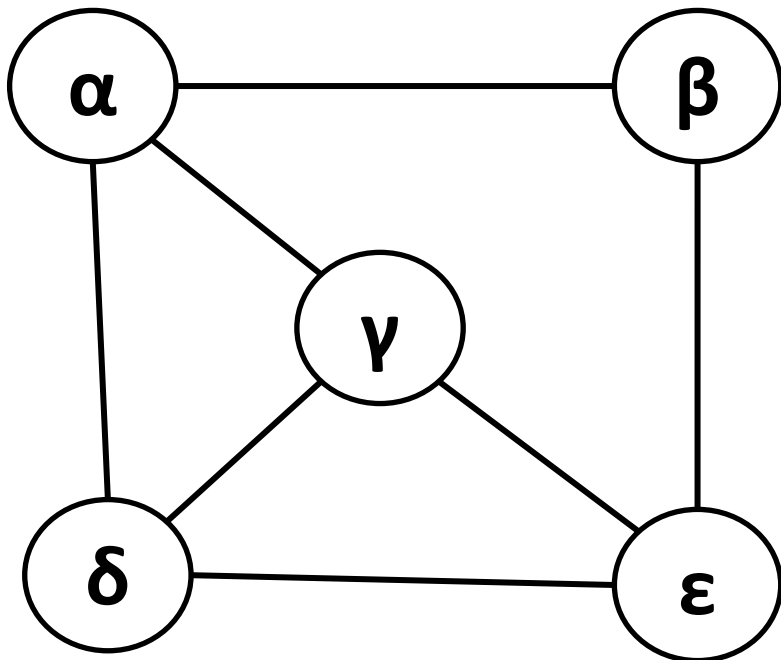
Λίστα Γειτονικότητας (1/2)

- Η λίστα γειτονικότητας για ένα γράφημα $G(V, E)$ αποτελείται από έναν πίνακα A , ο οποίος περιέχει $|V|$ λίστες, μία για κάθε κορυφή του γραφήματος G
- Για κάθε κορυφή $v \in V$, η λίστα $A[v]$ αποτελείται από όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές της κορυφής v



Λίστα Γειτονικότητας (2/2)

- Παράδειγμα



$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow /$

$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \epsilon \rightarrow /$

$\gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \delta \rightarrow \epsilon \rightarrow /$

$\delta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \epsilon \rightarrow /$

$\epsilon \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow /$



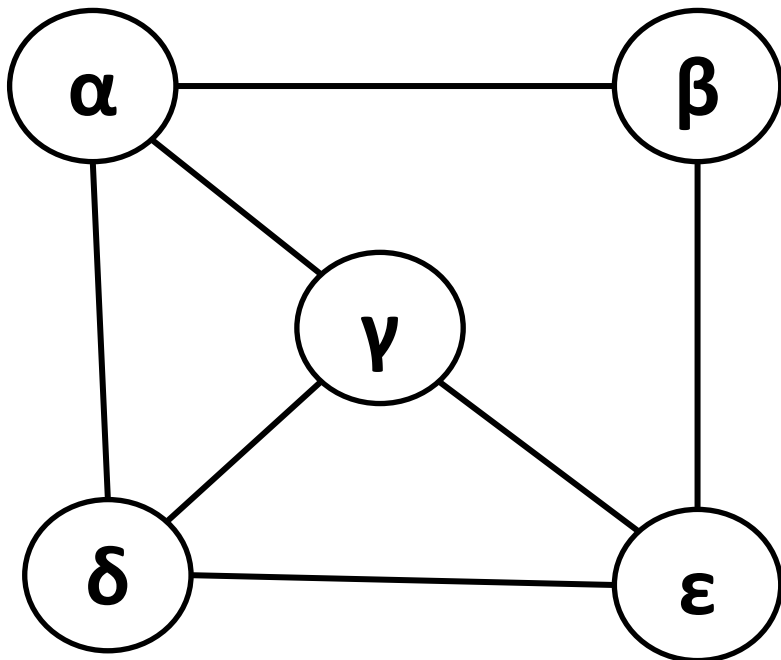
Πίνακας Γειτονικότητας (1/2)

- Για την αναπαράσταση ενός γραφήματος $G(V, E)$ με τον πίνακα γειτονικότητας, υποθέτουμε ότι στις κορυφές του συνόλου V έχουν αντιστοιχηθεί οι αριθμοί $1, 2, \dots, |V|$
- Ο πίνακας γειτονικότητας A έχει μέγεθος $|V| \times |V|$ και το στοιχείο $A[i, j]$ είναι 1 , αν $(i, j) \in E$, και 0 , διαφορετικά
- Όταν το γράφημα G είναι μη κατευθυντικό, μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των θέσεων μνήμης στο μισό



Πίνακας Γειτονικότητας (2/2)

- Παράδειγμα



	α	β	γ	δ	ε
α	0	1	1	1	0
β	1	0	0	0	1
γ	1	0	0	1	1
δ	1	0	1	0	1
ε	0	1	1	1	0



Τέλος Υποενότητας 1

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης (MBA). Δικτυωτή Ανάλυση (Θεωρία Γράφων)».
Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT148>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

