ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Η εύρεση των ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης (ελάχιστο ή μέγιστο) ισοδυναμεί με την εύρεση της τιμής (ή των τιμών) της ανεξάρτητης μεταβλητής, στην οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της.

Η παραγώγιση χρησιμοποιείται προκειμένου να εντοπιστούν και να μετρηθούν τα ακρότατα σημεία μιας συνάρτησης.

<u>Κριτήρια προσδιορισμού ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$:</u>

Μέγιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου) και

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Ελάχιστο: $\frac{dy}{dx} = 0$ (κριτήριο πρώτης παραγώγου)

και $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (κριτήριο δεύτερης παραγώγου)

Βήματα εύρεσης ακρότατων σημείων μιας συνάρτησης $y = f(x)$

1. Βρίσκουμε τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου $f'(x)$.
2. Θέτουμε την παράγωγο συνάρτηση ίση με μηδέν ($f'(x) = 0$) και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει, βρίσκοντας ποιες τιμές του x μηδενίζουν την $f'(x)$.
3. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο, $f''(x)$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου, $f'(x)$.
4. Υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης παραγώγου για κάθε τιμή του x που βρήκαμε στο βήμα 2 και ελέγχουμε αν είναι θετικές ή αρνητικές.

Ορισμός σημείου καμπής

Αν $f''(x) \geq 0$ τότε η f είναι κυρτή.

Αν $f''(x) \leq 0$ τότε η f είναι κοίλη.

Αν $f''(c) = 0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο στο c, τότε το c είναι σημείο καμπής της f (δηλαδή η f αλλάζει από κυρτή σε κοίλη ή το αντίστροφο).

Ακρότατα σε ένα κλειστό διάστημα τιμών [a,b]

Αν ζητείται η εύρεση μέγιστης ή ελάχιστης τιμής μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, και η συνάρτηση δεν παρουσιάζει στάσιμα (δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία όπου $f'(x)=0$) ή τα στάσιμα δεν είναι ακραία σημεία αλλά είναι σημεία καμπής (δηλαδή $f'(x)=0$ και $f''(x)=0$), τότε το μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης βρίσκεται στα άκρα του διαστήματος είναι το σημείο $(a, f(a))$ ή το σημείο $(b, f(b))$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης *f(x)* είναι **μία άλλη συνάρτηση** *F(x)* τέτοια ώστε η παράγωγος της *F(x)* να είναι η *f(x).*

Το αόριστο ολοκλήρωμα της *f(x)* συμβολίζεται με $F(x) = \int f(x)dx$

Κανόνες ολοκλήρωσης γνωστών συναρτήσεων

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int x^{-1} dx = \log_e x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e f(x) + c$$

$$\int f^n(x) dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{f'(x)} f^{n+1}(x) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Ο σταθερός όρος στο αόριστο ολοκλήρωμα

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του ολοκληρώματος περιλαμβάνει πάντα και έναν σταθερό όρο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν η παράγωγος της *F(x)* είναι η *f(x)* δηλαδή $F'(x) = f(x)$ τότε και η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) + C$ είναι επίσης η *f(x)* διότι $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Σε προβλήματα εύρεσης του ολοκληρώματος (π.χ. όταν δίνεται η συνάρτηση του οριακού κόστους και ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους) η τιμή της σταθεράς *C* προσδιορίζεται από κάποια άλλη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση