


# Τύποι

## Παραγώγισης \*\*\* Ολοκλήρωσης

f(x)	f'(x)	$\int f(x)$	Κανόνες Παραγώγισης και Ολοκλήρωσης
0	0	C	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
1	0	X+C	$(fg)' = f'g + fg'$
k	0	KX+C	$(cf)' = cf'$
X	1	$\frac{x^2}{2} + c$	$(f^v) = v f^{v-1} \cdot f'$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
ημχ	συνχ	-συνχ+C	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
συνχ	-ημχ	ημχ+C	$\int f(x)dx = F(x) + c$
εφχ	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	$-\ln \sigma\upsilon\nu\chi  + C$	$\int f'(x)dx = f(x) + c$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$		εφχ+C	$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
σφχ	$-\frac{1}{\eta\mu^2x}$	$\ln \eta\mu\chi  + C$	$\int (f + g)dx = \int fdx + \int gdx$
$\frac{1}{\eta\mu^2x}$		-σφχ+C	$\int f \cdot g'dx = f \cdot g - \int f' \cdot gdx$
$e^x$	$e^x$	$e^x + C$	$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$ $u=g(x), du=g'(x)dx$

$\ln x $	$\frac{1}{x}$		Ειδικές Περιπτώσεις
$\frac{1}{x}$		$\ln x +C$	$\int e^{ax+\beta} dx = \frac{1}{a} e^{ax+\beta} + c$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \eta\mu(ax + \beta) dx = -\frac{1}{a} \sigma\upsilon\nu(ax + \beta) + c$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$		$\int \sigma\upsilon\nu(ax + \beta) dx = \frac{1}{a} \eta\mu(ax + \beta) + c$
$f'(g(x)) \cdot g'(x)$		$f(g(x))+C$	$\int \frac{1}{ax + \beta} dx = \frac{1}{a} \ln ax + \beta  + c$
$[f(x)]^n$	$n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$		$\int (ax + \beta)^v dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + \beta)^{v+1}}{v+1} + c$
$n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$		$[f(x)]^n + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{ax + \beta}} dx = \frac{2\sqrt{ax + \beta}}{a} + c$
$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$		$\sqrt{f(x)} + C$	$\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2(ax + \beta)} = \frac{1}{a} \epsilon\phi(ax + \beta) + c$
$\eta\mu(f(x))$	$\sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$		$\int \frac{dx}{\eta\mu^2(ax + \beta)} = -\frac{1}{a} \sigma\phi(ax + \beta) + c$
$\sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$		$\eta\mu(f(x)) + C$	
$\sigma\upsilon\nu(f(x))$	$-\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$		Μορφές Ολοκληρωμάτων που αντιμετωπίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες
$\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$		$-\sigma\upsilon\nu(f(x)) + C$	$\int P(x) e^{ax+\beta} dx$
$\epsilon\phi(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$		$\int \eta\mu(kx + m) e^{ax+\beta} dx$

$\frac{f'(x)}{\sigma\nu\nu^2 f(x)}$		$\epsilon\phi(f(x))+C$	$\int \sigma\nu\nu(kx+m)e^{ax+\beta} dx$
$\sigma\phi(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$		$\int P(x)\eta\mu(ax+\beta)dx$
$\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$		$-\sigma\phi(f(x))+C$	$\int P(x)\sigma\nu\nu(ax+\beta)dx$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$		$\int P(x)\ln(ax+\beta)dx$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$		$e^{f(x)}+C$	Μορφές Ολοκληρωμάτων που αντιμετωπίζονται με αλλαγή μεταβλητής
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$		$\int f(ax+\beta)dx$ θέτω $u=ax+\beta \rightarrow dx=du/a$
$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$		$a^{f(x)}+C$	★ $\int \eta\mu^k x \sigma\nu\nu^\lambda x dx$
$\ln f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$		★ $\int \eta\mu^k x dx$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$		$\ln f(x) +C$	★ $\int \sigma\nu\nu^k x dx$
			$\int f(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx$ $u=k\eta\mu x$
			$\int f(x, \sqrt{k^2 + x^2}) dx$ $u=k\epsilon\phi x, \dots, t=\sigma\nu\nu x$
$\int f(\eta\mu x) dx$ 🔑	$\int f(\sigma\nu\nu x) dx$ 🔑	$\int f(\eta\mu x, \sigma\nu\nu x) dx$ 🔑	$\int f(x, \sqrt{x^2 - k^2}) dx$ $u=k/\sigma\nu\nu x$
$\int f(x, \sqrt{ax+\beta}) dx$ θέτουμε $t = \sqrt{ax+\beta}$	$\int f(x, \sqrt{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}) dx$ θέτουμε $t = \sqrt{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$	Για το ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης την αναλύουμε σε άθροισμα «απλών κλασμάτων».	$\int f(x, \sqrt{ax+\beta}, \sqrt{\gamma x+\delta}) dx$ θέτουμε πρώτα $t = \sqrt{ax+\beta}$ και στην συνέχεια ονομάζουμε $u$ την ρίζα που θα προκύψει ...

$$\int f(e^{ax+\beta}) dx$$

θέτουμε  $t=e^{ax+\beta}$

Σχόλια :

Για τα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα χρειάζονται οι τύποι:

$$1) \eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \quad 2) \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

$$3) \eta\mu x = \frac{2\varepsilon\phi \frac{x}{2}}{1 - \varepsilon\phi^2 \frac{x}{2}} \quad 4) \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 - \varepsilon\phi^2 \frac{x}{2}}{1 + \varepsilon\phi^2 \frac{x}{2}}$$

## 4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

### 4.1 ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ Ή ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Παράγουσα ή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης  $f(x)$  ορισμένη στο  $D(f)$  λέγεται η συνάρτηση  $F(x)$  για την οποία ισχύει  $F'(x)=f(x)$ .

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $F(x)=\int f(x)dx=\int df(x)$

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τότε υπάρχει η παράγουσα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Αν  $F(x)$  και  $G(x)$  είναι διαφορετικές παράγουσες μιας συνάρτησης  $f(x)$  τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά  $c$  δηλαδή:

$$F(x)-G(x)=c.$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Η ολοκλήρωση είναι η αντίθετη διαδικασία της παραγώγισης.

### 4.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$1... \int \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int f_i(x) dx, \lambda_i \text{ σταθερές}$$

ποσότητες.

$$2... \left[ \int f(x) dx \right]' = f(x)$$

$$3... \int f'(x) dx = f(x)+c, c \text{ σταθερή ποσότητα.}$$

### 4.3 ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$1... f(x)=0 \quad \Leftrightarrow F(x)=c$$

$$2... f(x)=a \quad \Leftrightarrow F(x)=ax+c$$

$$3... f(x)=x^k \quad \Leftrightarrow F(x)=x^{k+1}/(k+1)+c, k \neq -1$$

$$4... f(x)=e^x \quad \Leftrightarrow F(x)=e^x+c$$

$$5... f(x)=1/x \quad \Leftrightarrow F(x)=\ln|x|+c$$

$$6... f(x)=\cos(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=\sin(x)+c$$

$$7... f(x)=\sin(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=-\cos(x)+c$$

$$8... f(x)=1/\cos^2(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=\tan(x)+c$$

$$9... f(x)=1/\sin^2(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=-\cotan(x)+c$$

$$10... f(x)=1/(1+x^2) \quad \Leftrightarrow F(x)=\arctan(x)+c$$

$$11... f(x)=1/\sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow F(x)=\arcsin(x)+c$$

$$12... f(x)=a^x \quad \Leftrightarrow F(x)=a^x/\ln(a)+c$$

## 4.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

### 4.4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω  $f$  συνεχής στο  $D(f)$  και  $u=g(x)$  με πεδίο τιμών  $R(g)=D(f)$  τότε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+c.$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Το παραπάνω θεώρημα μας βοηθάει να απλοποιήσουμε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις παραγώγους των σύνθετων συναρτήσεων.

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ**  $\int G(x)dx$  :

**ΒΗΜΑ 1:** Γράφουμε την  $G(x) = f(g(x))g'(x)$ .

**ΒΗΜΑ 2:** Θέτουμε  $u=g(x)$ .

**ΒΗΜΑ 3:** Υπολογίζουμε  $\int G(x)dx = \int f(u)du$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**  $f(u)$  πρέπει να είναι εύκολα ολοκληρώσιμη.

### 4.4.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

**ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ:**

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα  $\int f(x)dx$  όπου η  $f$  μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων  $h_1$  και  $h_2$  (δηλαδή  $f(x)=h_1(x)h_2(x)$ ) και η παραγούσα  $H_1$  της συνάρτησης  $h_1$  είναι εύκολα παραγωγίσιμη τότε

$$\int f(x)dx = H_1(x)h_2(x) - \int H_1(x)h_2'(x)dx.$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I):** Αν  $\int h_1(x)h_2'(x)dx$  είναι εύκολα υπολογίσιμη τότε έχουμε υπολογίσει και το  $\int f(x)dx$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Ο κανόνας παραγοντικής ολοκλήρωσης συνεπάγεται από την ιδιότητα

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

θέτοντας  $H_1=f$  και  $h_2=g$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (III):** Η  $h_2'(x)$  πρέπει να είναι πιο απλή συνάρτηση από την  $h_2(x)$ . Η  $h_1(x)$  επιλέγεται ώστε να έχει εύκολα υπολογίσιμες παράγουσες.

### 4.4.3 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$$1... \int e^{ax+b} p(x) dx = \alpha^{-1} e^{ax+b} p(x) - \alpha^{-1} \int e^{ax+b} p'(x) dx$$

όπου  $p(x)$  είναι πολυωνυμική συνάρτηση

$$2... \int \sin(ax+b) p(x) dx = \\ = -\alpha^{-1} \cos(ax+b) p(x) + \alpha^{-1} \int \cos(ax+b) p'(x) dx$$

$$3... \int \cos(ax+b) p(x) dx = \\ = \alpha^{-1} \sin(ax+b) p(x) - \alpha^{-1} \int \sin(ax+b) p'(x) dx$$

$$4... \int f(x) \ln(g(x)) dx = \\ = F(x) \ln(x) - \int \frac{f(x)}{g(x)} g'(x) dx$$

όπου  $f, g$  είναι ρητές συναρτήσεις.

$$5... \int e^{\alpha x + \beta} \sin(\gamma + \delta x) dx, \quad \int e^{\alpha x + \beta} \cos(\gamma + \delta x) dx$$

θεωρούμε σαν  $h_1(x) = e^{\alpha x + \beta}$  και εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα παραγοντικής ολοκλήρωσης.

### 4.4.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι ρητές συναρτήσεις αναφέρονται σε συναρτήσεις που γράφονται σαν λόγος δύο πολυωνύμων δηλαδή  $f(x) = p(x)/q(x)$ .

#### ΜΕΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$1... \int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \alpha^{-1} \ln(\alpha x + \beta) + c$$

$$2... \int \frac{1}{(\alpha x + \beta)^k} dx = \alpha^{-1} (\alpha x + \beta)^{-k+1} / (-k+1) + c$$

$$3... \int \frac{x}{(1+x^2)^k} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-k+1} x}{-k+1} + c, k \neq -1$$

$$4... \int \frac{x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2)/2 + c$$

$$5... \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

## ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**ΒΗΜΑ 1:** Ελέγχουμε αν ο βαθμός του  $p(x)$  είναι μικρότερου βαθμού από το  $q(x)$ . Αν όχι διαιρούμε και προχωρούμε με το υπόλοιπο  $r(x)$  δηλαδή γράφουμε

$$p(x)/q(x) = k(x) + r(x)/q(x).$$

**ΒΗΜΑ 2:** Παραγοντοποιούμε την  $q(x)$ .

**ΒΗΜΑ 3:** Για κάθε παράγοντα  $(x-\alpha)^k$  γράφουμε

$$A_1/(x-\alpha) + A_2/(x-\alpha)^2 + \dots + A_k/(x-\alpha)^k.$$

Για κάθε παράγοντα  $(x^2+bx+c)^m$  γράφουμε

$$(B_1x+\Gamma_1)/(x^2+bx+c) + \dots + (B_kx+\Gamma_k)/(x^2+bx+c)^k$$

**ΒΗΜΑ 4:** γράφουμε το  $p(x)/q(x)$  σαν άθροισμα των παραπάνω συντελεστών και βρίσκουμε τα  $A_1, B_1, \Gamma_1, \dots, A_k, B_k, \Gamma_k$ .

**ΒΗΜΑ 5:** Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα με βάση τα βασικά ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

## 4.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ** (κατά Riemann): Έστω  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a,b]$  και για οποιοδήποτε διαμερισμό του  $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_k,b]$  με  $x_0=a$  και  $x_{k+1}=b$  και για οποιαδήποτε  $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$  για  $i=1, \dots,$

$k+1$  τότε το όριο  $\lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta x_i$ ,  $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$

ονομάζεται ολοκλήρωμα κατά Riemann και είναι ίσο με  $F(b)-F(a)$ .

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:**  $\int_a^b f(x)dx$  ή  $\int_{[a,b]} f(x)dx$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I):** Το ολοκλήρωμα από το  $a$  έως το  $b$  είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην  $f(x)$  και στην ευθεία  $y=0$  (δηλαδή τον άξονα των  $X$ ).

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Το ολοκλήρωμα είναι στην ουσία επέκταση των αθροισμάτων σε συνεχή διαστήματα.



### 4.5.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$1... \int_a^b \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_a^b f_i(x) dx, \quad \lambda_i \text{ σταθερές}$$

ποσότητες.

$$2... \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3... \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

4... Αν  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$  τότε

$$\int_{x_1}^{x_k} f(x) dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

5... Αν  $a < \beta < \gamma$  και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x$  τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\gamma f(x) dx$$

6... Αν  $f(x) < g(x)$  για κάθε  $a < x < \beta$  τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$$

### 4.6 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

#### 4.6.1 ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[a, +\infty]$

τότε το ολοκλήρωμα  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ορίζεται σαν το όριο

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

Ανάλογα έχουμε:

$$\star \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\star \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Αν τα παραπάνω όρια είναι ίσα με ένα πραγματικό αριθμό τότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα συγκλίνει διαφορετικά αποκλίνει.

#### 4.6.2 ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $(a,b)$  και

[1]  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  ή/και [2]  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  τότε το

ολοκλήρωμα  $\int_a^b f(x)dx$  ορίζεται σαν το όριο

$$\star \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \text{ αν ισχύει η [1]}$$

$$\star \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) \text{ αν ισχύει η [2]}$$

$$\star \lim_{t_1 \rightarrow a^+} \lim_{t_2 \rightarrow b^-} \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \text{ αν ισχύουν}$$

και η [1] και η [2].

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I):** Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και συνδυασμούς A και B τύπου γενικευμένα ολοκληρώματα.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II):** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ασυνεχής σε ένα σημείο  $x_0 \in (a,b)$  τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

#### 4.6.3 ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι συνεχής στο  $[a, +\infty)$  και  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x \geq a$  τότε

(1) αν  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  συγκλίνει τότε και το

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει.}$$

(2) αν  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  αποκλίνει τότε και το

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ αποκλίνει.}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί για όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα.

## 4.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### 4.7.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΣΟΔΩΝ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΥΣ

Συνήθως δίδεται η συνάρτηση οριακών εσόδων (ή οριακού κόστους) και ζητούνται οι συναρτήσεις ολικών ή μέσων εσόδων (ή κόστους) δηλαδή:

$$R(q) = \int MR(q) dq \text{ και } C(q) = \int MC(q) dq .$$

### 4.7.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ, ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Το εθνικό εισόδημα δίδεται σαν άθροισμα του ποσού που καταναλώνουμε και του ποσού που αποταμιεύουμε δηλαδή:

$$\text{ΕΙΣΟΔΗΜΑ} = \text{ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ} + \text{ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗ} \\ [E = K + A].$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω

έκφραση προς το εισόδημα έχουμε:  $\frac{dK}{dE} + \frac{dA}{dE} = 1$  .

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η παράγωγος της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα,  $\frac{dK}{dE}$ , ονομάζεται οριακή ροπή προς κατανάλωση.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η παράγωγος της αποταμίευσης ως προς το εισόδημα,  $\frac{dA}{dE}$ , ονομάζεται οριακή ροπή προς αποταμίευση.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η παράγωγος του εισοδήματος ως προς την αποταμίευση,  $\frac{dE}{dA}$ , ονομάζεται πολλαπλασιαστής εθνικού εισοδήματος και συμβολίζεται με k.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**  $k=1/(\text{οριακή ροπή προς αποταμίευση})$  και  $k=1/(1-\text{οριακή ροπή προς κατανάλωση})$ .

**ΕΡΜΗΝΕΙΑ:** Για κάθε νομισματική μονάδα που αποταμιεύεται το εθνικό εισόδημα αυξάνει κατά k μονάδες.

### 4.7.3 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πλεόνασμα καταναλωτή στο σημείο  $(q_0, p_0)$  λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να πληρώσει ο καταναλωτής για προϊόντα που πωλούνται πάνω από την τιμή  $p_0$  και δίδεται ως:

$$(i) \quad CS = \int_0^{q_0} D^{-1}(q) dq - p_0 q_0 \quad \text{αν η ζήτηση}$$

περιγράφεται από τη σχέση  $p = D^{-1}(q)$  ή

$$(ii) \quad CS = \int_{p > p_0, q > 0} D(p) dp \quad \text{αν η ζήτηση}$$

περιγράφεται από τη σχέση  $q = D(p)$ .

### 4.7.4 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Πλεόνασμα παραγωγού στο σημείο  $(q_1, p_1)$  λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να χάσει ο παραγωγός προσφέροντας τα αγαθά του σε τιμή μικρότερη από την τιμή  $p_1$  και δίδεται ως:

$$(i) \quad PS = p_1 q_1 - \int_0^{q_1} S^{-1}(q) dq \quad \text{αν η προσφορά}$$

περιγράφεται από τη σχέση  $p = S^{-1}(q)$  ή

$$(iii) \quad PS = \int_{p < p_1, q > 0} S(p) dp \quad \text{αν η προσφορά}$$

περιγράφεται από τη σχέση  $q = S(p)$ .