



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 11: Διανύσματα (Φροντιστήριο)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Σκοποί 1^{ης} υποενότητας

- Να μπορούν οι φοιτητές να επιλύσουν διανυσματικές εξισώσεις
- Να μπορούν οι φοιτητές να βρουν εάν δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίσουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίσουν το μήκος ενός διανύσματος
- Να μπορούν οι φοιτητές να κανονικοποιήσουν ένα διάνυσμα



Περιεχόμενα ενότητας

- 1^η Άσκηση (διανυσματική εξίσωση)
- 2^η Άσκηση (μήκος)
- 3^η Άσκηση (μήκος)
- 4^η Άσκηση (γραμμικός συνδυασμός)
- 5^η Άσκηση (εσωτερικό γινόμενο)
- 6^η Άσκηση (εσωτερικό γινόμενο)
- 7^η Άσκηση (κανονικοποίηση)
- 8^η Άσκηση (εσωτερικό γινόμενο)
- 9^η Άσκηση (γραμμική ανεξαρτησία)
- 10^η Άσκηση (γραμμική ανεξαρτησία)
- 11^η Άσκηση (γραμμική ανεξαρτησία)



1^η Άσκηση

- Να βρεθούν οι τιμές των x_1 , x_2 και x_3 ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



2^η Άσκηση

- Να υπολογιστούν τα μήκη των διανυσμάτων:
 1. $\alpha = [1, -2, 3]$
 2. $\beta = [-2, 1, 2, 4]$



3^η Άσκηση

- Αν $\alpha = [2, 1, -1, \lambda]$ να υπολογιστεί η τιμή της μεταβλητής λ έτσι ώστε να ισχύει: $||\alpha|| = \sqrt{15}$



4^η Άσκηση

- Να βρείτε τα διανύσματα \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 και \mathbf{a}_3 του \mathbb{R}^3 , έτσι ώστε ο γραμμικός συνδυασμός τους $3\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ να δίνουν το διάνυσμα $\mathbf{b} = [10, -2, 4]$



5^η Άσκηση

- Έστω $\mathbf{u} = [2, -3, 4]$, $\mathbf{v} = [-1, 2, -5]$, $\mathbf{w} = [1, 2, 1]$
- Να βρεθούν τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$



6^η Άσκηση

- Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = [6, 21]$, $\mathbf{v} = [7, x]$
- Να βρεθεί η τιμή του x έτσι ώστε τα δύο αυτά διανύσματα να είναι κάθετα μεταξύ τους



7^η Άσκηση

- Να κανονικοποιηθεί το διάνυσμα $\mathbf{v} = [-4, 3]$



8^η Άσκηση

- Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u}=[2, 1]$ και $\mathbf{v}=[1, 2]$
- Να βρεθεί τι μορφή έχει η μεταξύ τους γωνία



9^η Άσκηση

- Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = [3, 8]$, $\mathbf{v} = [4, 6]$
- Να ελεγχθεί η γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία τους



10^η Άσκηση

- Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = [2, 6]$, $\mathbf{v} = [5, 15]$
- Να ελεγχθεί η γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία τους



11^η Άσκηση

- Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = [1, 0]$, $\mathbf{v} = [0, 1]$
- Να ελεγχθεί η γραμμική εξάρτηση ή ανεξαρτησία τους



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Διανύσματα (Φροντιστήριο)».
Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

