



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 9: Ολοκληρώματα (Φροντιστήριο)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών  
Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

# Σκοποί ενότητας

- Να μπορούν να υπολογίσουν οι φοιτητές αόριστα ολοκληρώματα
- Να μπορούν να υπολογίσουν οι φοιτητές ορισμένα ολοκληρώματα
- Να μπορούν να υπολογίσουν οι φοιτητές εμβαδά με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίσουν ολοκληρώματα με άπειρα διαστήματα ολοκλήρωσης



# Περιεχόμενα ενότητας

1<sup>η</sup> Άσκηση (ολοκληρώματα)

2<sup>η</sup> Άσκηση (ολοκληρώματα)

3<sup>η</sup> Άσκηση (αρχικές-οριακές  
συνθήκες)

4<sup>η</sup> Άσκηση (αρχικές-οριακές  
συνθήκες)

5<sup>η</sup> Άσκηση (αρχικές-οριακές  
συνθήκες)

6<sup>η</sup> Άσκηση (ολοκληρώματα)

- 7<sup>η</sup> Άσκηση (εμβαδό)
- 8<sup>η</sup> Άσκηση (εμβαδό)
- 9<sup>η</sup> Άσκηση (εμβαδό)
- 10<sup>η</sup> Άσκηση (αόριστο  
ολοκλήρωμα)
- 11<sup>η</sup> Άσκηση (αόριστο  
ολοκλήρωμα)
- 12<sup>η</sup> Άσκηση (αόριστο  
ολοκλήρωμα)



# 1<sup>η</sup> Άσκηση

- Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$- \int x^{3/4} dx$$

$$- \int \frac{4e^x + e^{2x}}{e^x} dx$$

$$- \int \frac{4x^2 + 5}{\frac{4}{3}x^3 + 5x + 25} dx$$



## 2<sup>η</sup> Άσκηση

- Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$-\int \frac{x+4}{3x^2+24x} dx$$

$$-\int \left( x^{\frac{-4}{3}} + \frac{5}{x} + 8e^{4x} \right) dx$$



# 3<sup>η</sup> Άσκηση

- Η συνάρτηση του οριακού κόστους της παραγωγής  $q$  μονάδων ημερησίως είναι  $C'(q) = -0,02q + 500$
- Το κόστος παραγωγής **20** μονάδων ημερησίως είναι **10.000 €**
- Να βρεθεί η συνάρτηση του ολικού κόστους και να προσδιοριστεί το κόστος όταν παράγονται **100** μονάδες ημερησίως



# 4<sup>η</sup> Άσκηση

- Η οριακή παραγωγικότητα μιας οικονομικής δραστηριότητας δίνεται από τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{60}{x^2} + 10$ , όπου  $x$  είναι η κεφαλαιοποίηση σε εκατομμύρια €
- Όταν η κεφαλαιοποίηση είναι **5 εκατ. €**, η εβδομαδιαία παραγωγή είναι **62** μονάδες
- Να υπολογιστεί ο αριθμός των επιπλέον μονάδων που θα παραχθούν αν η κεφαλαιοποίηση αυξηθεί στα **10 εκατ. €**
- Διευκρίνιση: Η οριακή παραγωγικότητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της παραγωγής σε σχέση με την κεφαλαιοποίηση



# 5<sup>η</sup> Άσκηση

- Ο ρυθμός συσσώρευσης του κεφαλαίου δίνεται από τη συνάρτηση  $I(t)=135t^{1/3}$
- Αν το απόθεμα το έτος  $t=2$  είναι **120 εκατ. €** να βρεθεί η συνάρτηση του κεφαλαίου  $K(t)$  και να υπολογιστεί το κεφαλαιακό απόθεμα το χρόνο  $t=8$





# 6<sup>η</sup> Άσκηση

- Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω ορισμένων ολοκληρωμάτων

$$- \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{x^2} dx$$

$$- \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx$$

$$- \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx$$



# 7<sup>η</sup> Άσκηση

- Να βρεθεί το εμβαδόν που φράσσεται από το γράφημα της  $f(x)=x^2-2x$  και τις κάθετες ευθείες  $x=0$  και  $x=2$



# 8<sup>η</sup> Άσκηση

- Να βρεθεί το εμβαδόν που φράσσεται από τις καμπύλες  $y=x^2$  και  $y=x$



# 9<sup>η</sup> Άσκηση

- Να βρεθεί το εμβαδόν που φράσσεται από τις καμπύλες  $y=x^3$  και  $y=4x^2$



# 10<sup>η</sup> Άσκηση

- Να ελεγχθεί η σύγκλιση του παρακάτω αόριστου ολοκληρώματος

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$



# 11<sup>η</sup> Άσκηση

- Να ελεγχθεί η σύγκλιση του παρακάτω αόριστου ολοκληρώματος

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$



# 12<sup>η</sup> Άσκηση

- Να ελεγχθεί η σύγκλιση του παρακάτω αόριστου ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx$$



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





**Σημειώματα**

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Ολοκληρώματα (Φροντιστήριο)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

