ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών

Ενότητα 7: Παράγωγος, ελαστικότητα, παραγώγιση συναρτήσεων (Θεωρία)

Μπεληγιάννης Γρηγόριος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Αγροτικών Προϊόντων & Τροφίμων (Δ.Ε.Α.Π.Τ.)

Παράγωγος – Ελαστικότητα

Υποενότητα 1

Σκοποί 1ης υποενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές τι είναι ο μέσος και οριακός ρυθμός μεταβολής
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίζουν τις πλευρικές παραγώγους
- Να γνωρίσουν οι φοιτητές την έννοια της ελαστικότητας
- Να μπορούν οι φοιτητές να υπολογίζουν την ελαστικότητα σημείου και την ελαστικότητα τόξου μιας συνάρτησης

Περιεχόμενα 1ης υποενότητας

- Μέσος και οριακός ρυθμός μεταβολής
- Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου
- Πλευρικές παράγωγοι
- Παραγωγισιμότητα και συνέχεια συναρτήσεων
- Ελαστικότητα συναρτήσεων
- Ελαστικότητα σημείου και τόξου

Μέσος ρυθμός μεταβολής

- Μιας συνάρτησης f στο διάστημα

$[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ ή στο $[x_0, x_0-(-h)]$ $(h<0)$:

$$\mathrm{A}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \mathrm{h} \neq 0$$

Οριακός (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής (1/2)

- Μιας συνάρτησης f στο $x=x_0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \mathrm{h}\neq 0$$

Οριακός (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής (2/2)

- Είναι η παράγωγος της f(x) στο $x=x_0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\boldsymbol{f}^{'}(\boldsymbol{x_0}), \mathrm{h}\neq 0$$

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (1/3)

- Η παράγωγος της f(x) σε ένα σημείο $x=x_0$, $f'(x_0)$, αποτελεί την κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f(x) στο σημείο $x=x_0$

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (2/3)

- Η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)h \Leftrightarrow$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)h$$

Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου (3/3)

- Ουσιαστικά μας δείχνει πόσο απότομο είναι γράφημα της f(x) στο σημείο $x=x_0$
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της $f'(x_0)$, τόσο πιο απότομο είναι το γράφημα της f(x) στο $x=x_0$

Πλευρικές παράγωγοι (1/2)

- Αριστερή παράγωγος

$$f_-{}'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Δεξιά παράγωγος

$$f_+{}'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Πλευρικές παράγωγοι (2/2)

- Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν οι πλευρικές παράγωγοι $f_{-}'(x_0)$ και $f_{+}'(x_0)$ υπάρχουν και είναι ίσες

Παράδειγμα 1

- Να ελεγχθεί αν η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο x=0

Παραγωγισιμότητα και συνέχεια συναρτήσεων

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό
- Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει

Ελαστικότητα σημείου (1/5)

- Η ελαστικότητα μιας συνάρτησης y=f(x) συμβολίζεται με $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ και ορίζεται ως ο λόγος του σχετικού ρυθμού μεταβολής της y, $\boldsymbol{\frac{dy}{y}}$, δια του σχετικού ρυθμού μεταβολής της x, $\boldsymbol{\frac{dx}{x}}$

Ελαστικότητα σημείου (2/5)

- $\varepsilon_y = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}f^{'}(x) = \frac{x}{f(x)}f^{'}(x)$

Ελαστικότητα σημείου (3/5)

- Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\frac{y}{dx}$ και έχουμε:

$$\varepsilon_y = \frac{\frac{dy}{y}\frac{y}{dx}}{\frac{dx}{x}\frac{y}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{\text{οριακός ρυθμός μεταβολής της f}}{\text{μέσος ρυθμός μεταβολής της f}}$$

Ελαστικότητα σημείου (4/5)

- Έστω ότι αλλάζουμε τις μονάδες μέτρησης των μεταβλητών x και y μιας συνάρτησης $y = f(x)$ θέτοντας αντίστοιχα $\bar{x} = ax$ και $\bar{y} = \beta y$.
- Τότε η ελαστικότητα της νέας συνάρτησης $\bar{y} = h(\bar{x})$ ισούται με:

Ελαστικότητα σημείου (5/5)

$$\varepsilon_y = \frac{\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{ax}{\beta y}\frac{d(\beta y)}{d(ax)} = \frac{a\beta x dy}{a\beta y dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$

- Άρα:
  - Η ελαστικότητα μιας συνάρτησης είναι <u>ανεξάρτητη</u> των μονάδων μέτρησης των μεταβλητών της

Κλίση & ελαστικότητα γραμμικών συναρτήσεων

- Η κλίση μιας γραμμικής συνάρτησης ζήτησης $q = f(p) = a - \beta p, \beta > 0$ ισούται με $-\beta$ (είναι σταθερή)

- Η ελαστικότητά της ε_q ισούται με:

$$\varepsilon_q = \frac{p}{f(p)} f^{'}(p) = \frac{p}{f(p)}(-\beta) = \frac{-\beta}{f(p)} p, \beta > 0$$

Άρα, δεν είναι σταθερή

Συνάρτηση ζήτησης με σταθερή ελαστικότητα

- Έστω η συνάρτηση $y = Ap^{-\beta}$
- Η ελαστικότητα αυτής της συνάρτησης ισούται με:

$$\varepsilon_y = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp} = \frac{p}{y}(-\beta)Ap^{-\beta-1} = \frac{-\beta Ap^{-\beta}}{Ap^{-\beta}} = -\beta$$

- Άρα, η συνάρτηση αυτή έχει <u>σταθερή ελαστικότητα</u> σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της

Ελαστικότητα τόξου (1/4)

- Καλείται και **μέση ελαστικότητα** μεταξύ δύο σημείων (x_1,y_1) και (x_2,y_2) του γραφήματος της συνάρτησης f
- Χρησιμοποιείται όταν μία συνάρτηση f δεν μπορεί να εκφραστεί σε αναλυτική μορφή
- Δεν υπολογίζεται μοναδικά (3 τρόποι)

Ελαστικότητα τόξου (2/4)

- Υπολογισμός με βάση το σημείο (x_1,y_1):

$$\varepsilon_y = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{y_1}}{\dfrac{x_2 - x_1}{x_1}} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$$

Ελαστικότητα τόξου (3/4)

- Υπολογισμός με βάση το σημείο (x_2,y_2):

$$\varepsilon_y = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{y_2}}{\dfrac{x_2 - x_1}{x_2}} = \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}$$

Ελαστικότητα τόξου (4/4)

- Υπολογισμός με βάση τη μέση τιμή των (x_1,y_1) και (x_2,y_2):

$$\varepsilon_y = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2}}{\dfrac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}} = \frac{\dfrac{\Delta y}{y_1 + y_2}}{\dfrac{\Delta x}{x_1 + x_2}} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Τέλος Υποενότητας 1

Παραγώγιση συναρτήσεων

Υποενότητα 2

Σκοποί 2ης υποενότητας

- Να μάθουν οι φοιτητές τους κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων και να μπορούν να τους εφαρμόζουν
- Να μάθουν οι φοιτητές να υπολογίζουν παραγώγους ανώτερης τάξης

Περιεχόμενα 2ης υποενότητας

- Αριθμητική παραγώγιση
- Κανόνες παραγώγισης
- Παράγωγη εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων
- Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Κανόνες παραγώγισης (1/10)

1. Αν $\mathbf{y=f(x)=\alpha}$, τότε $\mathbf{y'=f'(x)=0}$
2. Αν $\mathbf{y=g(x)=\alpha \cdot f(x)}$, τότε $\mathbf{y'=g'(x)=\alpha \cdot f'(x)}$
3. Αν $\mathbf{f(x)=x^{\alpha}}$, τότε $\mathbf{f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}}$ (α οποιαδήποτε σταθερά) (<u>κανόνας δύναμης</u>)
4. Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε η $\mathbf{F(x)=f(x)\pm g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$\mathbf{F'(x)=f'(x)\pm g'(x)}$$

Κανόνες παραγώγισης (2/10)

5. Αν $\mathbf{F(x)=\alpha+\lambda\cdot f(x)}$, τότε $\mathbf{F'(x)=\lambda\cdot f'(x)}$
6. Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και λ,μ $\in$R, τότε η $\mathbf{F(x)=\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$\mathbf{F'(x)=\lambda\cdot f'(x)+\mu\cdot g'(x)}$$

7. Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $\mathbf{F(x)=f(x)\cdot g(x)}$ ισχύει (<u>κανόνας γινομένου</u>):

$$\mathbf{F'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)}$$

Κανόνες παραγώγισης (3/10)

8. Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, g(x)≠0 και $\boldsymbol{F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}}$ ισχύει (<u>κανόνας πηλίκου</u>):

$$\boldsymbol{F'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}}$$

Κανόνες παραγώγισης (4/10)

9. Έστω **y=g(z)** παραγωγίσιμη στο z και **z=f(x)** παραγωγίσιμη στο x, τότε η **y=g(z)=g(f(x))** είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει (αλυσωτός κανόνας):

$$\boldsymbol{F'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}$$

Κανόνες παραγώγισης (5/10)

10. Έστω **y=u^α**, όπου **u=g(x)**, τότε ισχύει (<u>γενικευμένος κανόνας δύναμης</u>):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$\alpha u^{\alpha-1} u' = \alpha [g(x)]^{\alpha-1} \cdot g'(x)$$

Κανόνες παραγώγισης (6/10)

11. Έστω **y=f(x)** ⇔ **x=g(y)** τότε ισχύει (<u>κανόνας της αντιστροφής</u>):

$$\boldsymbol{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)}}$$

$$\boldsymbol{g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

Κανόνες παραγώγισης (7/10)

12. Φυσικές εκθετικές συναρτήσεις

– Αν **$f(x)=e^x$** τότε **$f'(x)=e^x$**

– Αν **$y=e^{f(x)}$** τότε

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot e^{f(x)}}$$

Κανόνες παραγώγισης (8/10)

13. Γενικές εκθετικές συναρτήσεις
    - Αν **y=a^{f(x)}** τότε

$$\boldsymbol{y' = \ln a \cdot f'(x) \cdot e^{\ln \alpha \cdot f(x)} =}$$

$$\boldsymbol{= ln\, a \cdot f'(x) \cdot a^{f(x)}}$$

Κανόνες παραγώγισης (9/10)

14. <u>Φυσικές λογαριθμικές συναρτήσεις</u>

– Αν **y=lnx** τότε $\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$

– Αν **y=lnf(x)** τότε

$$\boldsymbol{y' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Κανόνες παραγώγισης (10/10)

- Αν **y=F(x)=f(x)$^{\mathbf{g(x)}}$** τότε

$$F'(x) = \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x) g(x)}{f(x)} \right] \cdot f(x)^{g(x)}$$

Λογαριθμική παραγώγιση

- Πρώτα λογαριθμούμε και στη συνέχεια παραγωγίζουμε

Παράγωγη ανώτερης τάξης

- Δεύτερη παράγωγος
  - $f''(x)$ ή $\frac{d^2x}{dx^2}$

- Ν-οστή παράγωγος
  - $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

Τέλος Υποενότητας 2

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γρηγόριος Μπεληγιάννης. «Μαθηματικά Διοικητικών & Οικονομικών Επιστημών. Παράγωγος, ελαστικότητα, παραγώγιση συναρτήσεων (Θεωρία)». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/modules/document/document.php?course=DEAPT128.

Σημείωμα Αδειοδότησης